

UNIVERSEN ALS INTERNE TOPOI

Ein Beitrag zur kategoriellen Mengenlehre

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Universität Bremen

vorgelegt von
Christian Maurer
aus Berlin

März 1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543102_0021

U N I V E R S E N A L S I N T E R N E T O P O I

Ein Beitrag zur kategoriellen Mengenlehre

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Universität Bremen

vorgelegt von
Christian Maurer
aus Berlin

März 1974



1. Gutachter: Prof. Dr. H. Herrlich

2. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. G. Osius

Tag des Kolloquiums: 17. 4. 74

I n h a l t

Kapitel		Seite
-1	Einleitung	-30
0	Einiges über Topoi	-24
1	Das Universumsobjekt	1
2	Das Universum als interne Kategorie	12
3	Das Universum als Untertopos	24
4	Ersetzung im Universum	41
5	Mengentheoretische Interpretation	49
6	Ausblick	55
	Symbolverzeichnis	58
	Literatur	61

Ein zentraler Begriff für die Formulierung vieler Sachverhalte in der Kategorientheorie ist die Mengenlehre. Selbst wenn man, wie Lawvere in [19], die kategoriellen Grundbegriffe im Rahmen einer elementaren Theorie Mengenlehre-frei einführt, stößt man bald auf Schwierigkeiten (Theorem über adjungierte Funktoren, Sätze mit Voraussetzungen vom Typ "lokal klein" usw.).

Daher erklärt sich das Bestreben vieler Kategoriker

- i) eine geeignete Mengenlehre zu finden, die es erlaubt, die erforderlichen Gesamtheiten zu bilden, ohne auf die bekannten grundlagentheoretischen Schwierigkeiten zu stoßen,
- ii) die für die Kategorientheorie benötigten Grundbegriffe der Mengenlehre durch kategorielle Konzepte zu ersetzen, d.h. die Kategorientheorie auch innerkategoriell zu begründen.

Die Versuche zu i) lassen sich grob in zwei Richtungen unterteilen: entweder die Benutzung von Klassen in der von Neumann-Bernays-Gödelschen Mengenlehre NBG, oder das Rechnen mit Universen in der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre ZF. Diskussionen dazu und Behandlungen dieser Problematik findet man in den Arbeiten [7], [23], [26], [27], [28], [35] und [42] sowie in den meisten Büchern über Kategorientheorie (z.B. in [10] und [29]).

Einen entscheidenden Fortschritt in Bezug auf ii) stellt die Entwicklung der Theorie der (elementaren) Topoi durch Lawvere und Tierney [24] dar, weil sie (abgesehen von den garbentheoretischen Aspekten) die Grundzüge der Mengenlehre kategoriell beschreibt. Als einführende Literatur in die Topostheorie sind [2], [8], [9], [15], [21], [22], [45] und [46] zu nennen.

Inzwischen gibt es eine Reihe von Arbeiten, die sich der Frage widmen, welche Sätze der Mengenlehre mit Hilfe dieser Theorie bewiesen werden können ([4], [32], [33], [44]), und inwieweit die Topostheorie Mengenlehre "ist" ([5], [34], [36], [37] und [39]).

In der vorliegenden Arbeit wird im Sinne einer Synthese von i) und ii) ein Teilsystem von ZF mit einem (!) Universum topos-theoretisch simuliert.

Im 0. Kapitel werden zunächst einige Sätze zusammengestellt, die im Verlauf der Arbeit benötigt werden. Zum Teil handelt es sich hierbei um Dinge, die unter den Experten als "Folklore" bekannt sind. Die Beweise sind daher kurzgefaßt, zumal zu erwarten ist, daß die mitunter sehr aufwendigen Diagrammjagden bald durch suggestivere Techniken abgelöst werden: in [3], [11] und [39] wird das zum inhaltlichen Verständnis der Sätze ausreichende intuitive "Rechnen mit Elementen" in einer intuitionistischen Mengenlehre durch einen formalen Kalkül legitimiert.

Im 1. Kapitel wird ein schwaches Universum im zugrundeliegenden Topos als ein Objekt U mit einer Relation $\bar{r}$ eingeführt, die den Axiomen (EXT), (POT), (ND), (PA) und (PROD) genügt. Interpretiert man $\bar{r}$ als $\in$ -Relation auf U , so besagen diese Axiome intuitiv die Extensionalität der Relation, die Abgeschlossenheit von U gegen die Bildung von Potenzmengen, die Tatsache, daß U nicht leer ist, die Abgeschlossenheit gegenüber geordneten Paaren und gegen (vermöge dieser Paare definierte) Produkte. Allerdings wird nicht das Kuratowski-Paar verwendet, sondern die sich als recht vorteilhaft erweisende kategorielle Fassung einer bis jetzt wohl unbekannten Definition für ein geordnetes Paar.

Weitere mögliche Axiome sind (TRH) und (VER), intuitiv die Abgeschlossenheit gegen die Bildung transitiver Hüllen bzw. gegen Vereinigungen. Abgesehen von (PA) wird bei der Formulierung der Axiome prinzipiell wie folgt vorgegangen: man gibt Operatoren an, die die entsprechenden Konstruktionen auf dem Potenzobjekt PU widerspiegeln, und verlangt, daß deren "Einschränkungen" auf U über den zu $\bar{r}$ gehörenden Morphismus $U \xrightarrow{r} PU$ faktorisieren, der es erlaubt, jedes "Element" von U als "Teilmenge" von U aufzufassen. Ein Universum in der Mengenlehre ist ein inneres Modell; dementsprechend ist (U, r) ein "Mengenlehre-Objekt" im zugrundeliegenden Topos (der übrigens keinerlei Beschränkungen unterworfen ist).

Das 2. Kapitel dient dem Nachweis, daß ein schwaches Universum U und seine iterierten Potenzen $P^n U$ (interne) Kategorienobjekte sind, und es wird angedeutet, daß diese Kategorien intern endlich vollständig sind. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei ein im 1. Kapitel konstruierter Operator, der intuitiv die Exponentiation beschreibt und damit die interne kartesische Abgeschlossenheit von U garantiert. Die verwendeten Konstruktionen simulieren den Weg von den mengentheoretischen Grundbegriffen " $\in$ " und "Menge" zu den kategoriellen "Quelle, Ziel, Komposition" und "Morphismus".

Jedes Element aus einem Universum U in der Mengenlehre ist als Teilmenge von U ein Objekt in der zugrundeliegenden Theorie. Wesentlich dabei ist, daß die mengentheoretischen Abgeschlossenheitseigenschaften von U in der Form, in der sie als Axiome im 1. Kapitel formuliert sind, im Topos der Mengen gegenüber diesem Prozeß des "herausziehens" invariant sind, weil die $\in$ -Relation in U ja gerade die Einschränkung der globalen $\in$ -Relation in der

betrachteten Mengenlehre ist. Im 3. Kapitel wird gezeigt, daß der entsprechende Sachverhalt im Rahmen der hier entwickelten Theorie zumindest in folgendem Sinn gilt:

Man hat als "externe Elemente" die globalen Schnitte in U , d.h. die Morphismen $1 \longrightarrow U$ (die Axiome an (U, r) garantieren, daß es genügend viele davon gibt). Zunächst wird bewiesen, daß diese "Elemente" einen Topos bilden. (Diese Aussage kann eleganter als in der vorliegenden Arbeit bewiesen werden, indem man zeigt, daß U ein internes Toposobjekt ist. Dieser Weg wird hier nicht beschritten, weil er inhaltlich klar erscheint, formal aber sehr aufwendig ist.) Jedes einzelne Element liefert durch Komposition mit r einen globalen Schnitt $1 \longrightarrow PU$ und damit ein Unterobjekt von U . Kern des 3. Kapitels ist, daß diese Zuordnung eine funktorielle Einbettung ist, die die gesamte Toposstruktur bewahrt und reflektiert, d.h. einen volltreuen logischen Funktor Φ in den zugrundeliegenden Topos definiert. (Allgemein hat man volltreue Funktoren Φ_n mit vielen Exaktheitseigenschaften, die jedem $1 \longrightarrow P^n U$ ein Unterobjekt von $P^{n-1} U$ zuordnen.)

Ein Universum ist ein schwaches Universumsobjekt (U, r) , für das (VER) und eine geeignete kategorielle Formulierung (ERS) des Ersetzungsaxioms gelten. Bezeichnet man Objekte aus dem großen Topos als U -Mengen (bzw. als U -Klassen), wenn sie zu einem $\Phi(a)$ für $1 \xrightarrow{a} U$ (bzw. zu einem $\Phi_1(a)$ für $1 \xrightarrow{a} PU$) isomorph sind, so besagt ein wesentliches Ergebnis des 4. Kapitels, daß für ein Universum U die Potenz einer U -Klasse mit einer U -Menge wieder eine U -Klasse ist. Des weiteren wird in diesem Kapitel angedeutet, daß es für ein Universum möglich ist, die interne Vollständigkeit des Topos der U -Mengen zu beweisen.

Mengen mit einer extensionalen fundierten Relation sind nach einem bekannten Satz aus der Mengenlehre (Mostowski) bis auf Isomorphie gerade transitive Mengen mit der $\in$ -Relation. Dieser Sachverhalt ermöglicht es, ein Axiom (FUND) zu formulieren, das intuitiv die Fundiertheit der Relation r auf dem Universumsobjekt U beschreibt. Im 5. Kapitel wird gezeigt, daß im Topos der Mengen die Begriffe "Universum" und "fundiertes Universumsobjekt" äquivalent sind.

Das 6. Kapitel wirft abschließend einige Fragen auf. Insbesondere sollte die durch diese Arbeit gegebene Möglichkeit weiterverfolgt werden, axiomatische Kategorientheorie innerhalb eines Topos zu betreiben, der ein Universum als internes Mengenlehre-Objekt und damit als internen Topos enthält.

Zugrundegelegt werden elementare Begriffe, Methoden und Sätze der Kategorientheorie, insbesondere der Theorie der kartesisch abgeschlossenen Kategorien. (Eine Kategorie $\underline{A}$ heißt kartesisch abgeschlossen, wenn es für jedes Objekt $A \in \text{Ob}\underline{A}$ eine natürliche Isomorphie $\underline{A}(. \times A, -) = \underline{A}(. , (-)^A)$ gibt.

Die Transposition vermöge dieser Isomorphie, die durch das nebenstehende Diagramm gekennzeichnet ist, wird durch einen Querstrich bezeichnet.)

$$\begin{array}{ccc}
 B \times A & \xrightarrow{f = \bar{g}} & C \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 g \times A = \bar{f} \times A & & \\
 \downarrow & & \\
 C^A \times A & & \text{ev}_{AC}
 \end{array}$$

Die kategorielle Sprechweise schließt sich in Terminologie und Notation der üblichen an. Es wird die $(-)\&\text{Ko}$ -Sprache benutzt (adjungiert heißt rechtsadjungiert, koadjungiert linksadjungiert usw.). Der identische Morphismus auf einem $A \in \text{Ob}\underline{A}$ wird wieder kurz mit A bezeichnet: $A \xrightarrow{A} A$.

Vorausgesetzt wird ferner Vertrautheit mit den grundlegenden Methoden und Ergebnissen der Topostheorie, wie sie in allen zitierten Publikationen zu finden sind.

Abschließend möchte ich den Herren Prof. Dr. H. Herrlich und Dr. G. Osius für zahlreiche anregende Gespräche zum Thema dieser Arbeit danken.

Grundlegend für die gesamte Arbeit ist folgende axiomatische Charakterisierung eines (elementaren) Topos:

0.1 Definition. Sei $\underline{E}$ eine elementare Kategorie (im Sinne von [19]). Dann heißt $\underline{E}$ ein Topos, wenn gilt:

(TOP) i) $\underline{E}$ hat ein finales Objekt 1 und zu je zwei Morphismen mit gemeinsamem Kobereich ein Pullback.

ii) $\underline{E}$ hat einen Unterobjekt-Klassifikator $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$,

d.h. zu jedem Mono $B \xrightarrow{m} A$

in $\underline{E}$ gibt es genau ein

$A \xrightarrow{\text{ch}(m)} \Omega$ so daß dieses

Diagramm ein Pullback ist.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{!_B} & 1 \\ \downarrow m & & \downarrow \text{true} \\ A & \xrightarrow{\text{ch}(m)} & \Omega \end{array}$$

iii) $\underline{E}$ hat Potenzen, d.h. zu jedem $A \in \text{Ob}\underline{E}$ gibt es ein $PA \in \text{Ob}\underline{E}$ und einen Morphismus $PA \times A \xrightarrow{\text{ev}_A} A$ so, daß jedes $B \times A \xrightarrow{f} A$ vermöge eines eindeutig bestimmten Morphismus $B \xrightarrow{\bar{f}} PA$ über ev_A faktorisiert.

iv) Alle diese Konstruktionen sind als feste Daten gegeben.

v) $\underline{E}$ ist nicht degeneriert, d.h. $0 \neq 1$.

0.2 Bemerkungen. Aus i) folgt bekanntlich, daß $\underline{E}$ endlich vollständig ist. Der in ii) durch m bestimmte charakteristische Morphismus $A \xrightarrow{\text{ch}(m)} \Omega$ sei im allgemeinen mit demselben Buchstaben wie das ihn realisierende Unterobjekt, d.h. mit $A \xrightarrow{B} \Omega$ bezeichnet. - Kock und Mikkelsen haben in [31] und [13] gezeigt, daß aus (TOP)i) bis iv) die endliche Kovollständigkeit (s. auch [40]; damit existiert das initiale Objekt 0 in v)) und die kartesische Abgeschlossenheit von $\underline{E}$ folgen; damit die ursprüngliche Definition eines Topos nach [24] bzw. [21]. - Durch eine

kanonische Pullbackauswahl nach iv) ist beispielsweise auch das Produkt $A \times B$ zweier Objekte mit den Projektionen als Pullback der beiden Morphismen $A \xrightarrow{!} A \rightarrow 1$ und $B \xrightarrow{!} B \rightarrow 1$ festgelegt. Auf bei der kanonischen Auswahl auftretende syntaktische Schwierigkeiten soll hier nicht näher eingegangen werden; sie können im Rahmen eines entsprechenden Formalismus beseitigt werden (s. z.B. [18] S. 9, [8] S. 3 ff. sowie [36] und [37]).

Unter Benutzung von $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega = \text{ch}(1 \xrightarrow{(\text{true}, \text{true})} \Omega \times \Omega)$ hat man für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ den internen Durchschnittsoperator

0.3 Definition. $PA \times PA \xrightarrow{\wedge} PA$ als transponierten von $PA \times PA \times A \xrightarrow{(p_0, p_2, p_1, p_2)} PA \times A \times PA \times A \xrightarrow{\text{ev}_A \times \text{ev}_A} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$.

(Mit p_i werden grundsätzlich Projektionen auf den $(i+1)$ -ten Faktor eines Produktes bezeichnet.)

Der char. Morphismus des Egalisators $\text{Eq}(\wedge_A, p_1) \longrightarrow PA \times PA$ ist

0.4 Definition. die Ordnungsrelation $PA \times PA \xrightarrow{\sup} \Omega$, deren transponierter der interne Potenzoperator $PA \xrightarrow{P} P^2A$ ist.

Man überzeugt sich leicht, daß die Potenzen bzgl. der Ordnung 0.4 interne Kategorienobjekte sind (s. 2.0), so daß es sinnvoll ist, von Adjungierten monotoner Morphismen $PA \longrightarrow PB$ zu reden.

0.5 Definition. Für $A \in \text{Ob} \underline{E}$ bezeichne $\text{Sub}(A) \subset \text{Mor} \underline{E}$ die Unterkategorie aller Monomorphismen in $\underline{E}/A$. Dann ist für jedes $A \xrightarrow{f} B \in \text{Mor} \underline{E}$ der Koadjungierte $\exists_f$ des Pullbackfunktors $f^{-1}: \text{Sub}(B) \longrightarrow \text{Sub}(A)$ durch die Epi-Mono-Zerlegung in $\underline{E}$ $C \xrightarrow{m} A \xrightarrow{f} B = C \longrightarrow \exists_f(C \xrightarrow{m} A) \longrightarrow B$ definiert.

Die interne Version dieser adjungierten Situation ist durch

0.6 Definition. $PB \xrightarrow{Pf} PA = \Omega^f$ und $PA \times B \xrightarrow{\exists f} \Omega =$
 $= \text{char. Morphismus von } \exists_{PA \times f} (\epsilon_A \longrightarrow PA \times A) \longrightarrow PA \times B$ gegeben.
 Dabei bedeuten grundsätzlich $\epsilon_X \longrightarrow PX \times X$ das durch ev_X

charakterisierte Unterobjekt und der Übergang zu einem quer-
gestrichenen Buchstaben den Wechsel zwischen den exponentiellen
transponierten $X \times Y \xrightarrow{h=\bar{k}} Z$ und $X \xrightarrow{k=\bar{h}} Z^Y$ (s. [25]).

0.7 Lemma. Sei $A \xrightarrow{f} B$
ein Monomorphismus. Dann ist
dieses Diagramm ein Pullback.

Beweis. Mit f ist auch
 $PA \times f$ mono, folglich ist

$$\epsilon_A \longrightarrow \exists_{PA \times f}(\epsilon_A) \text{ iso.}$$

Nach der Definition 0.6 von $\exists f$ folgt daraus die Behauptung.

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_A & \xrightarrow{\quad} & \epsilon_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ PA \times A & & PB \times B \\ \downarrow PA \times f & \xrightarrow{\exists f \times B} & \downarrow \\ PA \times B & & PB \times B \end{array}$$

0.8 Korollar. Ist $A \xrightarrow{f} B$ ein
Mono, dann kommutiert dieses Diagramm.

Beweis. Folgt aus 0.7.

$$\begin{array}{ccc} PA \times A & \xrightarrow{ev_A} & \Omega \\ \exists f \times f \downarrow & & \uparrow ev_B \\ PB \times B & & \end{array}$$

0.9 Lemma. Jedes Diagramm des neben-
stehenden Typs ist ein Pullback. Ins-
besondere gilt das für $X = 1$, d.h.
(mit der entsprechenden Identifikation)

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{f \times Z} & Y \times Z \\ X \times g \downarrow & & \downarrow Y \times g \\ X \times W & \xrightarrow{f \times W} & Y \times W \end{array}$$

für $Z \xrightarrow{g} W \xrightarrow{(f!, W)} Y \times W = Z \xrightarrow{(f!, Z)} Y \times Z \xrightarrow{Y \times g} Y \times W$.

0.10 Satz. Für jedes $B \in \text{Ob } \underline{E}$ repräsentiert $PB \xrightarrow{P} P^2B$
intern die Potenzbildung, d.h. für $A \xrightarrow{f} B$ gilt $P_B \bar{A} = \bar{P}A$,
wobei $1 \xrightarrow{\bar{A}} PB$ bzw. $1 \xrightarrow{\bar{P}A} P^2B$ die transponierten der
charakteristischen Morphismen von f bzw. $\exists f$ sind.

Beweis. Nach Def. 0.4 ist zu
zeigen, daß dieses Diagramm ein
Pullback ist. Man überlegt sich
leicht, daß für einen Morphismus

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{\quad} & \text{Eq}(\wedge_B, p_1) \\ \exists f \downarrow & & \downarrow \\ PB & \xrightarrow{(\bar{A}!, PB)} & PB \times PB \end{array}$$

$X \xrightarrow{h} PB$ die Kommutativität des entsprechenden Diagramms, d.h.

$X \xrightarrow{h} PB \xrightarrow{(\bar{A}!, PB)} PB \times PB = X \longrightarrow \text{Eq}(\wedge_B, p_1) \rightrightarrows PB \times PB$ mit der Isomorphie $(X \times A) \cap H = H$, d.h. mit der Existenz einer Faktorisierung $H \rightrightarrows X \times A \xrightarrow{X \times f} X \times B$ des durch $X \times B \xrightarrow{\bar{h}} \Omega$ klassifizierten Unterobjektes $H \rightrightarrows X \times B$ äquivalent ist. Für $X \xrightarrow{h} PB = PA \xrightarrow{\exists f} PB$ ist das aber gerade die Aussage von 0.7. Mit $X \times A \xrightarrow{\bar{h}_1} \Omega = X \times A \xrightarrow{X \times f} X \times B \xrightarrow{\bar{h}} \Omega$ ergibt sich aufgrund der obigen Bedingung das Pullback $H \rightrightarrows X \times A \xrightarrow{h_1 \times A} PA \times A = H \longrightarrow \epsilon_A \rightrightarrows PA \times A$, das durch Zusammensetzen mit dem Pullback $X \times A \xrightarrow{X \times f} X \times B \xrightarrow{h_1 \times B} PA \times B = X \times A \xrightarrow{h_1 \times A} PA \times A \xrightarrow{PA \times f} PA \times B$ (s. 0.9) und dem Pullback 0.7 die Gleichung $\exists f(h_1 \times B) = \bar{h}$ und somit eine Faktorisierung $X \xrightarrow{h} PB = X \xrightarrow{h_1} PA \xrightarrow{\exists f} PB$ liefert, die man leicht als einzig mögliche erkennt.

0.11 Korollar. Mit $A \xrightarrow{f} B$ ist auch $PA \xrightarrow{\exists f} PB$ mono.

0.12 Lemma. Für einen Monomorphismus $A \xrightarrow{f} B$ kommutiert das nebenstehende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
 PA \times PA & \xrightarrow{\exists f \times \exists f} & PB \times PB \\
 \downarrow \wedge_A & & \downarrow \wedge_B \\
 PA & \xrightarrow{\exists f} & PB
 \end{array}$$

Beweis. Die leicht zu beweisende

entsprechende Gleichung für $PB \xrightarrow{Pf} PA$ impliziert per interner Adjunktion $\exists f \dashv Pf$ (s. 0.6) die Behauptung, wenn man berücksichtigt, daß f mono die Gleichung $Pf \exists f = PA$ impliziert.

0.13 Lemma. Ist $A \xrightarrow{f} B$ ein Mono, dann kommutiert dieses Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
 PA \times PA & \xrightarrow{\exists f \times \exists f} & PB \times PB \\
 \downarrow \wedge_A & & \downarrow \wedge_B \\
 PA & \xrightarrow{\exists f} & PB
 \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen ist, daß das zweite Diagramm ein Pullback ist.

Diese Behauptung folgt aber aus dem vorigen Lemma in Verbindung mit der Monomorphie von $\exists f$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Eq}(\wedge_A, p_1) & \longrightarrow & \text{Eq}(\wedge_B, p_1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 PA \times PA & \xrightarrow{\exists f \times \exists f} & PB \times PB
 \end{array}$$

0.14 Lemma. Für einen Monomorphismus $A \xrightarrow{f} B$ kommutiert dieses Diagramm.

Beweis. Folgt nach Def. 0.4 aus 0.13 mit Hilfe von 0.8 für $\exists f$ statt f .

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{P_A} & P^2A \\ \exists f \downarrow & & \downarrow \exists^2 f \\ PB & \xrightarrow{P_B} & P^2B \end{array}$$

0.15 Satz. ("Beck condition")

$A \xrightarrow{f} B$ Ist das linke Diagramm
 $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$ ein Pullback, dann ist
das rechte kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} PB & \xrightarrow{P_f} & PA \\ \exists k \downarrow & & \downarrow \exists h \\ PD & \xrightarrow{P_g} & PC \end{array}$$

Beweis. Folgt aus der bekannten externen Situation (s. [15]).

0.16 Bemerkung. Bekanntlich hat in einem Topos der Pullback-funktor $f^*: E/B \rightarrow E/A$ für jedes $A \xrightarrow{f} B$ einen Adjungierten $\Pi_f: E/A \rightarrow E/B$. Durch Einschränkung auf $\text{Sub}(A)$ erhält man eine adjungierte Situation $f^{-1} \dashv \forall_f: \text{Sub}(A) \rightarrow \text{Sub}(B)$ (s. 0.6). Dann gilt auch das Analogon von 0.15 für $\forall$ anstelle von $\exists$.

Der Singleton-Morphismus $A \xrightarrow{\{\}} PA$, der als transponierter des charakteristischen Morphismus der Diagonale $A \xrightarrow{d} A \times A$ definiert ist, ist bekanntlich monomorph. Man hat folgendes

0.17 Lemma. Für jedes $A \xrightarrow{f} B$ kommutiert das nebenstehende Diagramm.

Beweis. Folgt wegen $\exists_{A \times f}(A \xrightarrow{d} A \times A) = A \xrightarrow{(A, f)} A \times B$ aus 0.15 für das Pullback

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \{\}_A \downarrow & \exists f & \downarrow \{\}_B \\ PA & \xrightarrow{\quad} & PB \end{array}$$

$A \times A \xrightarrow{\{\}_A \times \{\}_A} PA \times A \xrightarrow{PA \times f} PA \times B = A \times A \xrightarrow{A \times f} A \times B \xrightarrow{\{\}_A \times \{\}_B} PA \times B$.

0.18 Lemma. Sei $1 \xrightarrow{0} PA$ der transponierte von $A \xrightarrow{!} A \rightarrow 1 \xrightarrow{\text{false}} \Omega = A \xrightarrow{\text{false}} \Omega$, der den Mono $0 \rightarrow A$ charakterisiert. Dann kommutiert für jedes f dieses Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} & 0_X & \rightarrow PX \\ 1 & \searrow & \downarrow \exists f \\ & 0_Y & \rightarrow PY \end{array}$$

Beweis. Triviale Anwendung von 0.15.

0.19 Lemma. Das nebenstehende Diagramm ist für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ ein Pullback.

Beweis. Folgt aus der Definition von $1 \xrightarrow{\text{false}} \Omega$ als charakteristischer

Morphismus von $0 \longrightarrow 1$, weil 0 strikt initiales Objekt ist.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \{\}_A \\ 1 & \xrightarrow{0_A} & PA \end{array}$$

0.20 Lemma. Für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ ist das nebenstehende Diagramm ein Pullback.

Beweis. Für ein Paar von Morphismen

$X \xrightarrow{(a,b)} PA \times PA$ mit $\{\}_{PA} a = P_A b$ folgt

wegen der Reflexivität von $\supset_A$ zuerst $a = b$, woraus sich dann wegen $X \xrightarrow{(a, 0_A!)} PA \times PA \xrightarrow{\supset_A} \Omega = X \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ die Faktorisierung $X \xrightarrow{a} PA = X \xrightarrow{!} X \rightarrow 1 \xrightarrow{0_A} \Omega$ ergibt.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{0_A} & PA \\ \downarrow O_A & & \downarrow P_A \\ PA & \xrightarrow{\{\}_{PA}} & P^2 A \end{array}$$

0.21 Lemma. Für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ ist das nebenstehende Diagramm ein Pullback.

Beweis. Folgt aus 0.19 für PA unter Berücksichtigung der Kommutativität von 0.20.

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow O_A \\ & & PA \\ \downarrow & & \downarrow P_A \\ 1 & \xrightarrow{0_{PA}} & P^2 A \end{array}$$

0.22 Lemma. Ist das nebenstehende Diagramm ein Pullback, dann ist der induzierte Morphismus $A+B \xrightarrow{(f,g)} C$ ein Monomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow g \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

Beweis. Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, daß der Pullback-funktor als Koadjungierter (s. 0.16) Koprodukte bewahrt.

0.23 Lemma. Für je zwei Morphismen $A_0 \xrightarrow{f_0} B_0$ und $A_1 \xrightarrow{f_1} B_1$ ist das nebenstehende Diagramm ein Pullback.

Beweis. Mit demselben Argument wie 0.22.

(q_i bezeichne grundsätzlich die $(i+1)$ -te Injektion.)

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{+} & A_0 + A_1 \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_0 + f_1 \\ B_i & \xrightarrow{q_i} & B_0 + B_1 \end{array}$$

0.24 Lemma. Für je zwei Objekte A und B in $\underline{E}$ ist $P(A+B) \xrightarrow{(Pq_0, Pq_1)} PA \times PB$ ein Isomorphismus.

Beweis. In jeder kartesisch abgeschlossenen Kategorie ist $C^{A+B} \xrightarrow{(C^{q_0}, C^{q_1})} C^A \times C^B$ iso; für $C = \Omega$ folgt die Behauptung.

0.25 Lemma. Der Isomorphismus aus 0.24 ist in dem Sinne natürlich, als unter derselben Voraussetzung wie in 0.23 das nebenstehende Diagramm kommutiert.

Beweis. Anwendung von 0.15 auf 0.23.

$$\begin{array}{ccc} P(A_0 + A_1) & \xrightarrow{(Pq_0, Pq_1)} & PA_0 \times PA_1 \\ \exists(f_0 + f_1) \downarrow & & \downarrow \exists f_0 \times \exists f_1 \\ P(B_0 + B_1) & \xrightarrow{(Pq_0, Pq_1)} & PB_0 \times PB_1 \end{array}$$

0.26 Definition. Man hat vermöge $PA \times PA \xrightarrow{k_A} P(A \times A) = PA \times PA \xrightarrow{(Pp_0, Pp_1)} P(A \times A) \times P(A \times A) \xrightarrow{\wedge_{A \times A}} P(A \times A)$ für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ einen internen (kartesischen) Produktoperator.

0.27 Lemma. Dieser Operator ist natürlich, d.h. für jedes $A \xrightarrow{f} B$ kommutiert dieses Diagramm.

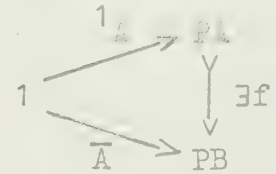
$$\begin{array}{ccc} PA \times PA & \xrightarrow{k_A} & P(A \times A) \\ \exists f \times \exists f \downarrow & & \downarrow \exists(f \times f) \\ PB \times PB & \xrightarrow{k_B} & P(B \times B) \end{array}$$

Beweis. Typische Diagrammjagd mit Hilfe von 0.8, 0.9 und 0.15.

0.28 Satz. Es gibt keine Retrakte $A \xrightarrow{f} \gg PA$.

Beweis. Sei $A \xrightarrow{B} \Omega = A \xrightarrow{(A, A)} A \times A \xrightarrow{\bar{f}} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$. Ist f split epi mit rechtsinversen $PA \xrightarrow{i} A$, dann gilt für $1 \xrightarrow{t} \Omega = 1 \xrightarrow{\bar{B}} PA \xrightarrow{i} A \xrightarrow{(A, A)} A \times A \xrightarrow{\bar{f}} \Omega$ die Gleichung $1 \xrightarrow{t} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega = 1 \xrightarrow{t} \Omega$. Wegen $\text{Eq}(\Omega, \neg) \xrightarrow{\neg} \Omega = 0 \xrightarrow{\neg} \Omega$ folgt daraus aber aufgrund der strikten Initialität von 0 die Isomorphie $1 \cong 0$, was nach (TOP) v) ausgeschlossen ist. (Der hier gegebene Beweis ist eine direkte Übersetzung der Russellschen Antinomie; vergleiche dazu [20].)

0.29 Lemma. Sei $1 \xrightarrow{1_A} PA = 1 \xrightarrow{\bar{A}} PA$ der transponierte von $A \xrightarrow{\text{true}} \Omega$. Dann kommutiert für jeden Mono $A \xrightarrow{f} B$ dieses Diagramm.



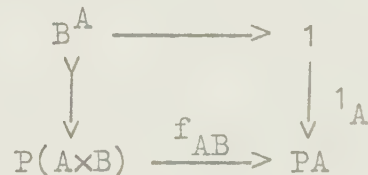
Beweis. Folgt mit 0.9 aus 0.7.

0.30 Lemma. Für einen Monomorphismus $A \xrightarrow{f} B$ ist das Diagramm 0.17 ein Pullback.

Beweis. Für $X \xrightarrow{(a,b)} PA \times B$ mit $(\exists f)a = \{\}_B b$ erhält man vermöge 0.7 eine Faktorisierung $X \dashrightarrow A$.

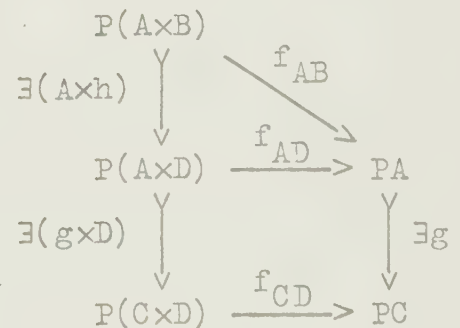
0.31 Definition. Für je zwei Objekte A und B aus $\underline{E}$ sei $P(A \times B) \xrightarrow{f_{AB}} PA$ als transponierter der Komposition des transponierten $P(A \times B) \times A \xrightarrow{\bar{e}_{AB}} PB$ von $\text{ev}_{A \times B}$ mit $PB \xrightarrow{\text{ch}(\{\}_B)} \Omega$ erklärt. (Intuitiv ordnet f_{AB} einer Relation $R \subset A \times B$ den Teil von A zu, auf dem R funktional ist.) Dann gilt folgendes

0.32 Lemma. Dieses Diagramm ist ein Pullback.



Beweis. Siehe z.B. [13], [14].

0.33 Lemma. Für je zwei Monos $A \xrightarrow{g} C$ und $B \xrightarrow{h} D$ kommutiert das nebenstehende Diagramm.



Beweis. Ein Vergleich von 0.7 für den Mono $A \times B \xrightarrow{A \times h} A \times D$ mit dem Pullback von $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ längs

$P(A \times B) \times A \times D \xrightarrow{\bar{e}_{AB} \times D} PB \times D \xrightarrow{\bar{e}_h} \Omega$ liefert nach Definition von $\bar{e}_{AB}$ (s. 0.31) die Gleichung $\bar{e}_h(\bar{e}_{AB} \times D) = \bar{e}(A \times h)$. Daraus folgt die Kommutativität von $P(A \times B) \times A \xrightarrow{\bar{e}(A \times h) \times A} P(A \times D) \times A \xrightarrow{\bar{e}_{AD}} PD = P(A \times B) \times A \xrightarrow{\bar{e}_{AB}} PB \xrightarrow{\bar{e}_h} PD$, woraus sich wegen $\text{ch}(\{\}_D) \exists h = \text{ch}(\{\}_B)$ (siehe 0.30) die Kommutativität des Dreiecks ergibt.

Unter Benutzung von 0.7 für $A \xrightarrow{g} C$ errechnet sich das Pullback von $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ längs $P(A \times D) \times C \xrightarrow{f_{AD} \times C} PA \times C \xrightarrow{\bar{g}} \Omega$ zu $Q \longrightarrow P(A \times D) \times A \xrightarrow{P(A \times D) \times g} P(A \times D) \times C$, wobei $Q \longrightarrow P(A \times D) \times A$ das Pullback von $D \xrightarrow{\{\}} PD$ längs $\bar{e}_{AD}$ ist. Aus 0.8 folgt $P(A \times D) \times A \xrightarrow{\bar{e}_{AD}} PD$; hieraus ergibt sich mit 0.7 für den Mono $A \times D \xrightarrow{g \times D} C \times D$ für $P(A \times D) \times C \xrightarrow{\exists(g \times D) \times C} P(C \times D) \times C \xrightarrow{\bar{f}_{CD}} \Omega$ das gleiche Pullback von $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ wie oben. Damit kommutiert auch das Rechteck.

Im folgenden wird für einige Konstruktionen die interne Version der Adjunktion 0.16 für einen Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ benötigt:

0.34 Definition. Der Adjungierte Vf von Pf ist analog zu 0.6 durch $PA \times B \xrightarrow{Vf} \Omega = \text{charakteristischer Morphismus des Monomorphismus } V_{PA \times f}(\epsilon_A \longrightarrow PA \times A) \longrightarrow PA \times B$ gegeben.

Die "Inverse" $PA \times PA \xrightarrow{\subseteq_A} \Omega$ der Relation $\supset_A$, definiert als charakteristischer Morphismus von $\text{Eq}(\wedge_A, p_0) \longrightarrow PA \times PA$ (s. 0.4), ist selbstverständlich auch eine Ordnungsrelation,

0.35 Definition. deren Transponierter der interne Znetoperator $PA \xrightarrow{\bar{q}_A} P^2A$ ist.

Bekanntlich kann in einem Topos für jedes Objekt A ein interner Durchschnittsoperator, der auf Familien von Unterobjekten von A wirkt, erklärt werden:

0.36 Definition. $P^2A \xrightarrow{\bar{\cap}_A} PA$ sei die Komposition $P^2A \xrightarrow{(Pp_0, \bar{e}_A!)} P(PA \times A) \times P(PA \times A) \xrightarrow{\Rightarrow_{PA \times A}} P(PA \times A) \xrightarrow{Vp_1} PA$, wobei $PA \times A \xrightarrow{p_0} PA$ und $PA \times A \xrightarrow{p_1} A$ die Projektionen sind, $1 \xrightarrow{\bar{e}_A} PA \times A$ der transponierte von ev_A , und $PX \times PX \xrightarrow{\Rightarrow_X} PX$ entsprechend 0.3 für den Operator $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$ definiert ist.

0.37 Bemerkung. Mikkelsen definiert $P^2A \xrightarrow{\bar{n}_A} PA$ als $P^2A \xrightarrow{\bar{q}_{PA}} P^3A \xrightarrow{P(\bar{q}_A)} P^2A \xrightarrow{P(\{\}_A)} PA$. Osius betrachtet $h_A = P^2A \times PA \times A \xrightarrow{(p_0, p_1, p_1, p_2)} P^2A \times PA \times PA \times A \xrightarrow{(\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_1, \bar{p}_2)} PA \xrightarrow{\bar{p}_1} PA$ und setzt $\bar{n}_A = \bigvee_{P^2A \times p_1} (h_A^{-1}(\text{true}))$. Der transponierte von h_A ist gerade $\Rightarrow_{PA \times A}(Pp_0, \bar{\epsilon}_A!)$; daraus ergibt sich durch eine einfache Anwendung von 0.16 aufgrund der Definition von $\bigvee_{p_1}$ nach 0.34 die Äquivalenz von 0.36 zur Definition von Osius.

0.38 Satz. $P^2A \xrightarrow{\bar{n}_A} PA$ ist (als kontravarianter Funktor, s. die Bemerkung nach 0.5) adjungiert auf der rechten Seite zum Znetoperator $PA \xrightarrow{\bar{q}_A} P^2A$. Darüberhinaus gilt $\bar{n}_A \bar{q}_A = PA$.
Beweis. Siehe z.B. [33] und [38].

In ähnlicher Weise hat man einen internen Vereinigungsoperator

0.39 Definition. $P^2A \xrightarrow{U_A} PA$ als Komposition $P^2A \xrightarrow{(Pp_0, \bar{\epsilon}_A!)} P(PA \times A) \times P(PA \times A) \xrightarrow{\wedge_{PA \times A}} P(PA \times A) \xrightarrow{\exists p_1} PA$.

0.40 Bemerkung. Mikkelsen definiert U_A als Komposition $P^2A \xrightarrow{\exists \bar{q}_A} P^3A \xrightarrow{\bar{n}_{PA}} P^2A \xrightarrow{\bar{n}_A} PA$. Für die Definition nach Osius gilt sinngemäß das gleiche wie in 0.37, wenn $\Rightarrow$ durch $\wedge$ und $\bigvee$ durch $\exists$ ersetzt wird. Ähnlich wie in 0.38 hat man den

0.41 Satz. Der Vereinigungsoperator $P^2A \xrightarrow{U_A} PA$ ist koadjungiert zum Potenzoperator $PA \xrightarrow{P_A} P^2A$ und es gilt $U_A P_A = PA$. (Folglich ist P_A ein Monomorphismus.)

0.42 Lemma. Für jedes $A \xrightarrow{f} B$ kommutiert dieses Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} P^2A & \xrightarrow{U_A} & PA \\ \exists^2 f \downarrow & & \downarrow \exists f \\ P^2B & \xrightarrow{U_B} & PB \end{array}$$

Beweis. Die Behauptung ist vermöge

Adjunktion äquivalent zu der Gleichung

$P(\exists f)P_B = P_A P f$, deren Transposition $\triangleright_B(PB \times \exists f) = \triangleright_A(P f \times A)$ die interne Beschreibung der adjungierten Situation $\exists f \dashv P f$ ist.

Für den Durchschnitt dagegen gilt lediglich die Ungleichung

$$0.43 \text{ Lemma. } \exists f \cap_A \leq \cap_B \exists^2 f \text{ für } A \xrightarrow{f} B.$$

Beweis. Man bestätigt leicht $\text{Eq}(\wedge_A, p_0) \leq (\exists f \times \exists f)^{-1}(\text{Eq}(\wedge_B, p_0))$,
woraus per Adjunktion $\exists_{PA \times \exists f} \dashv (PA \times \exists f)^{-1}$ nach Definition von $\exists^2 f$ (0.6) und der Znetopoperatoren (0.35) unter Anwendung von 0.15 auf das von $PA \times PA \xrightarrow{\exists f \times \exists f} P^2 A \times P^2 B$ herrührende Pullback die Ungleichung $\exists^2 f \varphi_A \leq \varphi_B \exists f$ folgt. Vorschalten von $\cap_A$ liefert dann wegen 0.38 die Behauptung.

Für Monomorphismen erhält man allerdings eine 0.42 entsprechende Gleichung, wenn man sich bei der Durchschnittsbildung auf nichtleere Systeme einschränkt. Sei dazu für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$

0.44 Definition. das Objekt P^*A
"der nichtleeren Unterobjekte von A "
durch dieses Pullback erklärt:

$$\begin{array}{ccc} P^*A & \dashrightarrow & 1 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \text{true} \\ PA & \xrightarrow{\exists ! A} & \Omega \end{array}$$

($P1$ ist dabei mit Ω identifiziert.)

Nach 0.6 für $!_A$ ist P^*A damit durch die Epi-Mono-Zerlegung von $\epsilon_A \rightharpoonup PA \times A \xrightarrow{p_0} PA$ gegeben.

0.45 Bemerkung. Für jedes $A \xrightarrow{f} B$ erhält man wegen $!_B f = !_A$ die nebenstehende Faktorisierung, durch die $\exists^* f$ definiert wird.

$$\begin{array}{ccc} P^*A & \xrightarrow{\exists^* f} & P^*B \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ PA & \xrightarrow{\exists f} & PB \end{array}$$

Als Durchschnittsoperator auf nichtleeren Systemen hat man dann

$$0.46 \text{ Definition. } P^*PA \xrightarrow{\cap^*} PA = P^*PA \rightharpoonup P^2A \xrightarrow{\cap} PA.$$

0.47 Lemma. Für $A \xrightarrow{f} B$ mono kommutiert dieses Diagramm:

Beweis. Aus 0.43 folgt wegen 0.8 die Ungleichung $\bar{\cap}_A \leq \bar{\cap}_B (\exists^2 f \times f)$.

$$\begin{array}{ccc} P^2A \times A & \xrightarrow{\bar{\cap}_A} & \Omega \\ \downarrow \exists^2 f \times f & & \downarrow \bar{\cap}_B \\ P^2B \times B & \xrightarrow{\bar{\cap}_B} & \Omega \end{array}$$

Sei $H_X \rightrightarrows P^2 X \times P X \times X$ das durch h_X charakterisierte Unterobjekt (siehe 0.37, Def. von Osius). 0.8 für f und $\exists f$ liefert $h_B(\exists^2 f \times \exists f \times f) = h_A$, woraus sich mit $(P^2 A \times \exists f \times A)^{-1} \dashv \vee_{P^2 A \times \exists f \times A}$ die Ungleichung $\vee_{P^2 A \times \exists f \times A}(H_A) \geq (\exists^2 f \times P B \times f)^{-1}(H_B)$ ergibt. Durch Komposition mit der universellen Quantifizierung längs der Projektion $P^2 A \times P B \times A \xrightarrow{(p_0, p_2)} P^2 A \times A$ erhält man daraus unter Anwendung von 0.16 auf das von $P^2 A \times P B \times A \xrightarrow{(\exists^2 f p_0, f p_2)} P^2 B \times B$ herrührende Pullback nach Definition von $\bar{n}_A$ (0.37) auch die Ungleichung $\bar{n}_A \geq \bar{n}_B(\exists^2 f \times f)$.

0.48 Bemerkung. Für jedes $A \xrightarrow{f} B$ erhält man aus der Definition von $\exists f$ (0.6) die nebenstehende Faktorisierung.

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_A & \xrightarrow{\epsilon_f} & \epsilon_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ P A \times A & \xrightarrow{\exists f \times f} & P B \times B \end{array}$$

0.49 Satz. Für jeden Mono $A \xrightarrow{f} B$ kommutiert das nebenstehende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} & P^* P A & \xrightarrow{n_A^*} & P A & \\ \exists^* \exists f \downarrow & & & & \downarrow \exists f \\ & P^* P B & \xrightarrow{n_B^*} & P B & \end{array}$$

Beweis. Da mit $\epsilon_{PA} \xrightarrow{e} P^* P A$ auch $\epsilon_{PA} \times B \xrightarrow{e \times B} P^* P A \times B$ epi ist, ist die Behauptung nach 0.44, 0.45 und 0.48

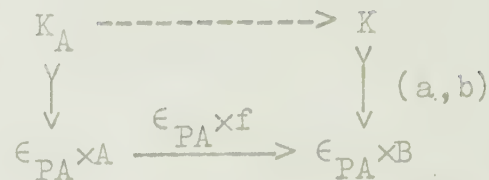
zur Kommutativität des nebenstehenden Diagramms äquivalent,

$$\begin{array}{ccccc} \epsilon_{PA} \times B & \xrightarrow{g_{PA} \times B} & P^2 A \times B & \xrightarrow{n_A \times B} & P A \times B \\ \downarrow \exists f \times B & & \downarrow g_{PB} \times B & & \downarrow \exists f \\ \epsilon_{PB} \times B & \xrightarrow{g_{PB} \times B} & P^2 B \times B & \xrightarrow{\bar{n}_B} & \Omega \end{array}$$

wobei $\epsilon_X \xrightarrow{g_X} P X = \epsilon_X \rightrightarrows P X \times X \xrightarrow{p_0} P X$. Pullback von $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ längs beider Wege ergibt (oben-rechts) das Unterobjekt $K_A \rightrightarrows \epsilon_{PA} \times A \xrightarrow{\epsilon_{PA} \times f} \epsilon_{PA} \times B$, wobei $K_X = (g_{P X \times X})^{-1}(\bar{n}_X)$, und (links-unten) $(\epsilon_{\exists f \times B})^{-1}(K_B \rightrightarrows \epsilon_{PB} \times B) = K \xrightarrow{(a, b)} \epsilon_{PA} \times B$. Aus 0.48 für $\exists f$ folgt $(\exists^2 f \times f)(g_{PA} \times A) = (g_{PB} \times B)(\epsilon_{\exists f} \times f)$, wegen 0.47 erhält man nach Definition von K_A , K_B und K daher die

Beziehung $K_A \rightharpoonup \epsilon_{PA} \times A = (\epsilon_{\exists f} \times f)^{-1} (K_B \rightharpoonup \epsilon_{PB} \times B) =$
 $= (\epsilon_{PA} \times f)^{-1} (K \xrightarrow{(a,b)} \epsilon_{PA} \times B)$, d.h.

das nebenstehende Diagramm ist ein Pullback. Zum Beweis der Behauptung reicht es offenbar zu zeigen, daß



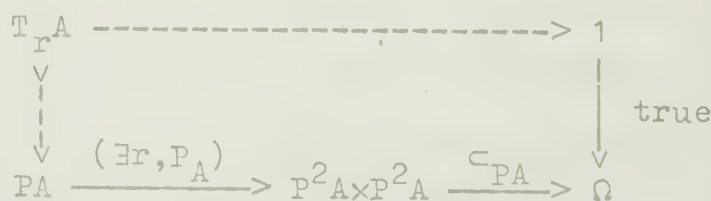
$K_A \dashrightarrow K$ iso ist, d.h. (weil $\epsilon_{PA} \times f$ mono) daß eine Faktorisierung $K \xrightarrow{(a,b)} \epsilon_{PA} \times B = K \dashrightarrow \epsilon_{PA} \times A \xrightarrow{\epsilon_{PA} \times f} \epsilon_{PA} \times B$ existiert.

Wegen $K_B = (g_{PB} \times B)^{-1} \vee_{P^2 B \times P_1} (H_B)$ (s. 0.37) erhält man vermöge Adjunktion eine Faktorisierung $K_B \rightharpoonup \epsilon_{PB} \times B \rightharpoonup P^2 B \times PB \times B =$
 $= K_B \dashrightarrow H_B \rightharpoonup P^2 B \times PB \times B$. Mit 0.48 für $\exists f$ und der Gleichung $h_B(\exists^2 f \times \exists f \times B) = \Rightarrow (ev_{PA}(p_0, p_1), \overline{\exists f}(p_1, p_2))$ folgt daraus, weil $\Rightarrow (true_K, x) = true_K$ die Gleichung $x = true_K$ impliziert, daß $K \xrightarrow{(a,b)} \epsilon_{PA} \times B \rightharpoonup P^2 A \times PA \times B \xrightarrow{(p_1, p_2)} PA \times B \xrightarrow{\overline{\exists f}} \Omega =$
 $= K \xrightarrow{true_K} \Omega$ gilt. Das liefert aber wegen 0.7 sofort die gewünschte Faktorisierung von $K \xrightarrow{(a,b)} \epsilon_{PA} \times B$.

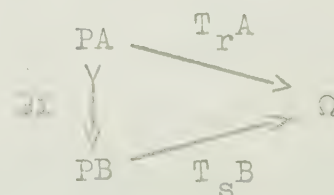
Im folgenden soll für jedes Objekt A aus $\underline{E}$ mit einer Relation $A \times A \xrightarrow{\bar{r}} \Omega$ ein Operator konstruiert werden, der intuitiv jedem Unterobjekt von A seine r -transitive Hülle zuordnet.

0.50 Definition. Für eine Relation $A \xrightarrow{r} PA$ sei durch das nebenstehende Pullback

das Objekt "der r -transitiven Unterobjekte von A " erklärt.



0.51 Lemma. Sind $A \xrightarrow{f} B$ und $B \xrightarrow{g} C$ Relationen und ist $(A, r) \xrightarrow{f} (B, s)$ eine Inklusion (d.h. $A \xrightarrow{f} B$ ein Mono mit $\exists fr =$
 $= sf$), dann kommutiert dieses Diagramm.



Beweis. Folgt wegen 0.14 und 0.13 (für $\subset$) aus der Def. 0.50.

0.52 Definition. Sei $PA \xrightarrow{T_{A,r}} P^2A$ als Durchschnitt $PA \xrightarrow{(\varphi_A, \overline{T_{A,r}!})} P^2A \times P^2A \xrightarrow{\wedge_{PA}} P^2A$ definiert. (Der transponierte $\overline{T_{A,r}}$ von $T_{A,r}$ ist dann $PA \times PA \xrightarrow{(\subset_A, (T_{A,r})p_1)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$.)

0.53 Lemma. Für jede Inklusion $(A,r) \xrightarrow{f} (B,s)$ gilt $PA \xrightarrow{T_{A,r}} P^2A \xrightarrow{\exists^2 f} P^2B \leq PA \xrightarrow{\exists f} PB \xrightarrow{T_{B,s}} P^2B$.

Beweis. Man hat nach 0.43 $\exists^2 f \varphi_A \leq \varphi_B \exists f$ sowie nach 0.51 $\exists^2 f \overline{T_{A,r}} \leq \overline{T_{B,s}}$, daher mit 0.12 für $\exists^2 f$ die Behauptung nach 0.52.

0.54 Lemma. Es gilt $1 \xrightarrow{1_A} PA \xrightarrow{T_{A,r}} \Omega = 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$, d.h. das identische Unterobjekt $A \xrightarrow{1_A} A$ ist r -transitiv. Beweis. Sicherlich gilt $1 \xrightarrow{(\overline{1_A}, 1_A)} PA \times PA \xrightarrow{\subset_A} \Omega = 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ für alle Unterobjekte $B \xrightarrow{\quad} A$. Einerseits folgt daraus $P_A 1_A = 1_{PA}$, andererseits somit $(T_{A,r}) 1_A = \subset_{PA} (\exists r 1_A, 1_{PA}) = \text{true}$.

0.55 Korollar. Der Morphismus $PA \xrightarrow{(T_{A,r}, 1_A!)} P^2A \times PA$ faktorisiert über $\epsilon_{PA} \xrightarrow{\quad} P^2A \times PA$.

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{\quad} & \epsilon_{PA} \\ \downarrow (T_{A,r}, 1_A!) & \searrow & \uparrow \\ P^2A \times PA & & \end{array}$$

Beweis. Mit 0.52 und 0.54 gilt

$$\begin{aligned} \text{ev}_{PA}(T_{A,r}, 1_A!) &= \overline{T_{A,r}}(PA, 1_A!) = \wedge(\subset_A, (T_{A,r})p_1)(PA, 1_A!) = \\ &= \wedge(\subset_A(PA, 1_A!), (T_{A,r}) 1_A!) = \wedge(\text{true}_{PA}, \text{true}_{PA}) = \text{true}_{PA}. \end{aligned}$$

0.56 Lemma. $PA \xrightarrow{T_{A,r}} P^2A$ faktorisiert über $P^*PA \xrightarrow{\quad} P^2A$.

Beweis. Man nehme für $T_{A,r}^*$ die Komposition der Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{T_{A,r}} & P^2A \\ & \searrow T_{A,r}^* & \uparrow \\ & & P^*PA \end{array}$$

$PA \xrightarrow{\quad} \epsilon_{PA}$ nach 0.55 mit dem Epi $\epsilon_{PA} \xrightarrow{\quad} P^*PA$ (s. 0.44).

Operator der r -transitiven Hüllen ist jetzt die Komposition

0.57 Definition. $PA \xrightarrow{t_{A,r}} PA = PA \xrightarrow{T_{A,r}} P^2A \xrightarrow{\cap_A} PA$.

0.58 Satz. Für jede Inklusion $(A,r) \xrightarrow{f} (B,s)$ hat man die Ungleichung $PA \xrightarrow{\exists f} PB \xrightarrow{t_{B,s}} PB \leq PA \xrightarrow{t_{A,r}} PA \xrightarrow{\exists f} PB$.

Beweis. Aus 0.53 folgt $\exists^* \exists f t_{A,r}^* \leq t_{B,s}^* \exists f$, wobei $P^* PB \xrightarrow{\quad} P^2 B$ die induzierte (initiale) Ordnung trägt. Daher gilt $\cap_B^* t_{B,s}^* \exists f \leq \cap_B^* \exists^* \exists f t_{A,r}^*$, woraus wegen 0.49 und 0.56 die Behauptung folgt.

In ähnlicher Weise kann man für jede Relation $A \xrightarrow{r} PA$ als r -Vereinigungsoperator $PA \xrightarrow{U_{A,r}} PA$ die Komposition

0.59 Definition. $PA \xrightarrow{\exists r} P^2 A \xrightarrow{U_A} PA$ betrachten.

Für diesen Operator gilt ein 0.89 entsprechender Sachverhalt:

0.60 Lemma. Für Inklusionen $(A,r) \xrightarrow{f} (B,s)$ ist das nebenstehende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{U_{A,r}} & PA \\ \exists f \downarrow & & \downarrow \exists f \\ PB & \xrightarrow{U_{B,s}} & PB \end{array}$$

Beweis. Folgt aus 0.59 wegen 0.42.

Eine wichtige Beziehung zwischen den beiden Operatoren 0.57 und 0.59 stellt folgender Satz her:

0.61 Satz. Für jede Relation $A \xrightarrow{r} PA$ gilt $U_{A,r} \leq t_{A,r}$, d.h. $PA \xrightarrow{(U_{A,r}, t_{A,r})} PA \times PA \xrightarrow{\subseteq_A} \Omega = PA \xrightarrow{\text{true}} PA \rightarrow \Omega$. Der Beweis macht Gebrauch von folgender

0.62 Bemerkung. Für zwei Morphismen $X \xrightarrow{x} \Omega$ und $X \xrightarrow{y} \Omega$ gilt $x \leq y$, d.h. $\Rightarrow(x,y) = \text{true}_X$ genau dann, wenn für alle $Z \xrightarrow{z} X$ gilt: $xz = \text{true}_Z$ impliziert $yz = \text{true}_Z$.

Beweis. Mit der Bemerkung gegen Ende des Beweises von 0.49 ist die eine Schlußrichtung trivial; für die andere wählt man $Z \xrightarrow{z} X = x^{-1}(1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega) \xrightarrow{\quad} X$.

Beweis von 0.61. Zunächst wird gezeigt, daß $PA \times PA \xrightarrow{\overline{T}_{A,r}} \Omega \leq PA \times PA \xrightarrow{\subseteq_A (U_{A,r} \times PA)} \Omega$ gilt. Sei $Z \xrightarrow{(a,b)} PA \times PA$ mit

$\bar{T}_{A,r}(a,b) = \text{true}_Z$. Nach 0.52 und 0.50 folgt $c_A(a,b) = \text{true}_Z$ sowie $c_{PA}(\exists r, P_A)b = \text{true}_Z$, d.h. $a \leq b$ und $\exists r b \leq P_A b$. Daraus folgt aufgrund der Monotonie von $\exists r$ und U_A sowie wegen 0.41 $U_A \exists r a \leq U_A \exists r b$ und $U_A \exists r b \leq b$, zusammen also $U_{A,r} a \leq b$, d.h. $c_A(U_{A,r} \times P_A)(a,b) = \text{true}_Z$. Das vermöge 0.62 resultierende Ergebnis ist offenbar äquivalent zu $T_{A,r} \leq \bar{T}_{A,r}^{U_{A,r}}$ (bezüglich der Ordnung c_{PA}); 0.38 liefert daher $U_{A,r} \leq \cap_A T_{A,r} = t_{A,r}$.

0.63 Lemma. Bezeichne d_X die Diagonale $X \xrightarrow{(X,X)} X \times X$. dann gilt für den in 0.26 definierten Morphismus k_A stets $PA \xrightarrow{(k_A d_{PA}, \exists d_A)} P(A \times A) \times P(A \times A) \xrightarrow{\exists_{A \times A}} \Omega = PA \xrightarrow{\text{true}_{PA}} \Omega$. Beweis. Aus der Gleichung $\wedge_A (Pd_A \times Pd_A) = Pd_A \wedge_{A \times A}$ (s. Beweis von 0.12) folgt nach Definition von k_A wegen $p_0 d_A = p_1 d_A = A$ und $\wedge_A d_{PA} = PA$ die Beziehung $PA = Pd_A k_A d_{PA}$. Die Adjunktion $\exists d_A \dashv Pd_A$ liefert dann die Behauptung.

0.64 Lemma. Das nebenstehende Diagramm ist ein Pullback, wobei $\bar{e}_A = \bar{e}_{AA}$ der trans-

$$\begin{array}{ccccc} \epsilon_A & \xrightarrow{\quad} & PA \times A & \xrightarrow{p_1} & A \\ \downarrow & & & & \downarrow \circ_A \\ PA \times A & \xrightarrow{\exists d_A \times A} & P(A \times A) \times A & \xrightarrow{\bar{e}_A} & PA \end{array}$$

ponierte von $P(A \times A) \times A \times A \xrightarrow{\text{ev}} A \times A \rightarrow \Omega$ ist (s. Definition 0.31).

Beweis. Für zwei Morphismen $PA \times A \xleftarrow{(a,b)} X \xrightarrow{c} A$ ist die Kommutativität des entsprechenden Diagramms äquivalent mit $X \times A \xrightarrow{(a,b) \times A} PA \times A \times A \xrightarrow{\exists d_A} \Omega = X \times A \xrightarrow{c \times A} A \times A \xrightarrow{=}_A \rightarrow \Omega$, wobei $=_A = \text{ch}(d_A)$. Vorschalten von $X \xrightarrow{(X,c)} X \times A$ ergibt zunächst die notwendige Bedingung $b = c$. Pullback 0.7 für die Diagonale $A \xrightarrow{d}_A A \times A$ liefert dann eine Faktorisierung $X \xrightarrow{(a,b)} PA \times A = X \dashrightarrow \epsilon_A \xrightarrow{\quad} PA \times A$.

Daß das obige Diagramm für $X = \epsilon_A$ kommutiert, folgt leicht aus dem Vergleich der Pullbacks von $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ längs beider Wege.

0.65 Korollar. Für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ gilt mit $f_A = f_{AA}$ (s. Def. 0.31) $PA \xrightarrow{(Pf_A\{\})_{PA}, \exists d_A} P^2(A \times A) \times P(A \times A) \xrightarrow{ev} P(A \times A) \rightarrow \Omega = \text{true}_{PA} \rightarrow \Omega$.

Beweis. Komposition des Pullbacks 0.64 mit $PA \xrightarrow{ch(\{\})_A} \Omega$ liefert per Transposition $PA \xrightarrow{\exists d_A} P(A \times A) \xrightarrow{f_A} PA = PA$, d.h. $=_A (PA, f_A \exists d_A) = \text{true}_{PA}$. Daraus folgt wegen $=_A (PA, f_A \exists d_A) = \text{ev}_{PA}(\{\}_{PA} \times PA)(PA \times f_A)(PA, \exists d_A) = \text{ev}_{PA}(P^2 A \times f_A)(\{\}_{PA}, \exists d_A) = \text{ev}_{P(A \times A)}(Pf_A\{\})_{PA}, \exists d_A$ die Behauptung.

Seien $A \times B \xleftarrow{p_{01}} A \times B \times C \xrightarrow{p_{12}} B \times C$ die Projektionen (p_0, p_1) und (p_1, p_2) (bzw. $p_{02} = (p_0, p_2)$).

0.66 Definition. Dann ist durch die Komposition von $P(A \times B) \times P(B \times C) \xrightarrow{Pf_{p_{01}} \times Pf_{p_{12}}} P(A \times B \times C) \times P(A \times B \times C) \xrightarrow{\wedge_{A \times B \times C}} P(A \times B \times C)$ mit $P(A \times B \times C) \xrightarrow{\exists p_{02}} P(A \times C)$ die relationale Komposition $P(A \times B) \times P(B \times C) \xrightarrow{c_{ABC}} P(A \times C)$ gegeben.

0.67 Lemma. Für je drei Morphismen $A \xrightarrow{f} D$, $B \xrightarrow{g} E$ und $C \xrightarrow{h} F$ (g mono)

kommutiert das

nebenstehende

Diagramm, d.h.

$$\begin{array}{ccc} P(A \times B) \times P(B \times C) & \xrightarrow{c_{ABC}} & P(A \times C) \\ \downarrow E(f \times g) \times E(g \times h) & & \downarrow E(f \times h) \\ P(D \times E) \times P(E \times F) & \xrightarrow{c_{DEF}} & P(D \times F) \end{array}$$

der Operator 0.66 der relationalen Komposition ist natürlich.

Beweis. Analog zu 0.27.

Im folgenden werden einige Lemmata bereitgestellt, die dem Nachweis dienen sollen, daß die Komposition funktionaler Relationen wieder funktional ist. Die Beweise sind mit Hilfe der in 0.62 erläuterten Technik unter Benutzung der Adjunktion 0.6 und der Beck-condition 0.15 zwar längliche, aber elementare ("straight-forward") Diagrammjagden und sollen deshalb übergangen werden.

Es seien jetzt $PX \times PY \xrightarrow{k_{XY}} P(X \times Y)$ die Verallgemeinerung des Produktoperators 0.26, $P(X \times Y) \xrightarrow{f_{XY}} PX$ der in 0.31 definierte Operator "funktionaler Teil" und $P(X \times Y) \times P(Y \times Z) \xrightarrow{c_{XYZ}} P(X \times Z)$ die in 0.66 definierte relationale Komposition.

Weiterhin sei bemerkt, daß die Morphismen $P(X \times Y) \xrightarrow{\exists p_0} PX$ bzw. $P(X \times Y) \xrightarrow{\exists p_1} PY$ (wobei $X \xleftarrow{p_0} X \times Y \xrightarrow{p_1} Y$ die Projektionen) intuitiv jeder Relation ihren Vorbereich bzw. ihren Nachbereich zuordnen. Die mengentheoretische Interpretation aller folgenden Aussagen liegt damit auf der Hand.

Der Übersichtlichkeit halber soll für $PY \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} PY$ anstelle von $X \xrightarrow{(f,g)} PY \times PY \xrightarrow{c_Y} \Omega = X \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ nur kurz $f \leq g$ geschrieben werden.

$X \xrightarrow{a} PA$, $X \xrightarrow{b} PB$, $X \xrightarrow{c} PC$, $X \xrightarrow{s} P(B \times C)$ seien beliebige Morphismen (mit gleicher Quelle).

0.68 Lemma. Es gilt stets $X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{\exists p'_0} PA \leq \leq X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_0} PA$, sowie

0.69 Lemma. entsprechend $X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{\exists p'_1} PC \leq \leq X \xrightarrow{s} P(B \times C) \xrightarrow{\exists p''_1} PC$.

0.70 Korollar. $X \xrightarrow{r} P(A \times B) \leq X \xrightarrow{k_{AB}(a,b)} P(A \times B)$ und $X \xrightarrow{s} P(B \times C) \leq X \xrightarrow{k_{BC}(b,c)} P(B \times C)$ zusammen implizieren $X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \leq X \xrightarrow{k_{AC}(a,c)} P(A \times C)$

Beweis. Folgt aus 0.68 und 0.69 mit Hilfe des folgenden

0.71 Lemma. Die Projektionen $X \xleftarrow{p_0} X \times Y \xrightarrow{p_1} Y$ liefern eine adjungierte Situation $P(X \times Y) \xrightarrow{(\exists p_0, \exists p_1)} PX \times PY \dashv \dashv PX \times PY \xrightarrow{k_{XY}} P(X \times Y)$ mit $(\exists p_0, \exists p_1) k_{XY} = PX \times PY$, wenn das Produkt $PX \times PY$ mit der naheliegenden Ordnung versehen wird.

Beweis. Durch Komposition der beiden adjungierten Situationen
 $P(X \times Y) \xrightarrow{d_{X \times Y}} P(X \times Y) \times P(X \times Y) \dashv P(X \times Y) \times P(X \times Y) \xrightarrow{\wedge_{X \times Y}} P(X \times Y)$ und
 $P(X \times Y) \times P(X \times Y) \xrightarrow{\exists p_0 \times \exists p_1} P(X \times Y) \dashv P(X \times Y) \xrightarrow{f_{X \times Y}} P(X \times Y)$.

0.72 Lemma. Man hat immer die Ungleichung
 $P(A \times B) \xrightarrow{f_{AB}} P(A) \leq P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_0} P(A)$ (bzw. $f_{AC} \leq \exists p'_0$ usw.).

0.73 Lemma. Aus der Ungleichung $X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_1} P(B) \leq$
 $\leq X \xrightarrow{s} P(B \times C) \xrightarrow{\exists p''_0} P(B)$ folgt die Umkehrung von 0.68:
 $X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{\exists p'_0} P(A) \geq X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_0} P(A)$.

0.74 Lemma. Aus $\exists p_0 r \leq f_{AB} r$ und $\exists p_1 r \leq f_{BC} s$, d.h. aus
 $X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{(\exists p_0, \exists p_1)} P(A \times B) \leq X \xrightarrow{(f_{AB} r, f_{BC} s)} P(A \times B)$ folgt
 $X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{\exists p'_0} P(A) \leq X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{f_{AC}} P(A)$.

0.75 Lemma. Für den Fall, daß $X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{f_{AB}} P(A) =$
 $= X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_0} P(A)$ und $X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_1} P(B) \leq$
 $\leq X \xrightarrow{s} P(B \times C) \xrightarrow{\exists p''_0} P(B) = X \xrightarrow{s} P(B \times C) \xrightarrow{f_{BC}} P(B)$ gelten, hat
man die beiden Gleichungen $X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{f_{AC}} P(A) =$
 $= X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{\exists p'_0} P(A) = X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_0} P(A)$.

Beweis. Mit den genannten Voraussetzungen liefern 0.68 und 0.73
die zweite Gleichung, 0.72 und 0.74 die erste.

0.76 Korollar. Seien $X \xrightarrow{a} P(A) = X \xrightarrow{r} P(A \times B) \xrightarrow{f_{AB}} P(A)$
und $X \xrightarrow{b} P(B) = X \xrightarrow{s} P(B \times C) \xrightarrow{f_{BC}} P(B)$. Wenn $X \xrightarrow{r} P(A \times B) \leq$
 $\leq X \xrightarrow{k_{AB}(a,b)} P(A \times B)$ und $X \xrightarrow{s} P(B \times C) \leq X \xrightarrow{k_{BC}(b,c)} P(B \times C)$
gelten, dann erhält man $X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{f_{AC}} P(A) =$
 $= X \xrightarrow{a} P(A) = X \xrightarrow{c_{ABC}(r,s)} P(A \times C) \xrightarrow{\exists p'_0} P(A)$.

Beweis. Nach 0.72 hat man $a \leq \exists p_0 r$ und $b \leq \exists p_0'' s$. Aus den
Voraussetzungen folgt vermöge 0.71 $\exists p_0 r \leq a$, $\exists p_0'' s \leq b$ sowie
 $\exists p_1 r \leq b$. Damit sind die Bedingungen von 0.75 erfüllt.

0.77 Lemma. Es gilt $1 \xrightarrow{(1_A, 1_B)} P(A \times B) \xrightarrow{k_{AB}} P(A \times B) = 1 \xrightarrow{1_{A \times B}} P(A \times B)$.

Beweis. Man hat immer $\exists p_0, 1_{A \times B} \leq 1_A$ und $\exists p_1, 1_{A \times B} \leq 1_B$ (s. Bew. von 0.54), d.h. $(\exists p_0, \exists p_1) 1_{A \times B} \leq (1_A, 1_B)$. Wegen der Adjunktion 0.71 folgt daraus $1_{A \times B} \leq k_{AB}(1_A, 1_B)$, damit die Behauptung.

0.78 Satz. Es gibt einen Morphismus $B^A \times C^B \xrightarrow{\text{comp}_{ABC}} C^A$,
der dieses Diagramm kommutativ ergänzt.

$$\begin{array}{ccc} B^A \times C^B & \xrightarrow{\text{comp}_{ABC}} & C^A \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(A \times B) \times P(B \times C) & \xrightarrow{c_{ABC}} & P(A \times C) \end{array}$$

Beweis. Seien $B^A \times C^B \xrightarrow{r} P(A \times B) = B^A \times C^B \xrightarrow{p_0} B^A \xrightarrow{\quad} P(A \times B)$ und $B^A \times C^B \xrightarrow{s} P(B \times C) = B^A \times C^B \xrightarrow{p_1} C^B \xrightarrow{\quad} P(B \times C)$ die von den kanonischen Einbettungen herrührenden Morphismen (s. 0.32). Dann gilt $f_{AB}r = 1_A!$, $f_{BC}s = 1_B!$; sowie wegen 0.77 $r \leq 1_{A \times B}! = k_{AB}(1_A!, 1_B!)$ und $s \leq 1_{B \times C}! = k_{BC}(1_B!, 1_C!)$. Nach 0.76 für $X = B^A \times C^B$ folgt daraus $f_{AC}c_{ABC}(r, s) = 1_A!$. Die Pullback-eigenschaft von 0.32 liefert damit die gewünschte Faktorisierung $B^A \times C^B \xrightarrow{c_{ABC}(r, s)} P(A \times C) = B^A \times C^B \dashrightarrow C^A \xrightarrow{\quad} P(A \times C)$.

0.79 Bemerkung. Man kann zeigen, daß der (durch 0.78 eindeutig bestimmte) Morphismus $B^A \times C^B \xrightarrow{\text{comp}_{ABC}} C^A$ übereinstimmt mit dem internen

0.80 Definition. Kompositionsmorphismus $B^A \times C^B \longrightarrow C^A$, der in jeder kartesisch abgeschlossenen Kategorie als transponierter von $B^A \times C^B \times A \xrightarrow{(p_1, p_0) \times A} C^B \times B^A \times A \xrightarrow{C^B \times \text{ev}_{AB}} C^B \times B \xrightarrow{\text{ev}_{BC}} C$ gegeben ist.

0.81 Lemma. Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ ist genau dann mono, wenn das nebenstehende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & PA \\ f \downarrow & & \uparrow Pf \\ B & \xrightarrow{\{\}_B} & PB \end{array}$$

Beweis. f mono ist äquivalent dazu, daß (mit $=_X = \text{ch}(d_X)$) das Diagramm $A \xrightarrow{d_A} A \times A \xrightarrow{f \times f} B \times B = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{d_B} B \times B$ ein Pullback ist. Komposition mit dem Pullback $B \xrightarrow{d_B} B \times B \xrightarrow{=_{B \times B}} \Omega = B \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ liefert wegen $=_B(f \times f) = \text{ev}_B(\{\}_B \times B)(f \times f) = \text{ev}_B(\text{PB} \times f)(\{\}_B \times A)(f \times A) = \text{ev}_A(\text{Pf} \{\}_B f \times A)$ die Behauptung.

0.82 Korollar. Für jeden Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in $\underline{E}$ ist das Bild von f Unterobjekt von PA .

Beweis. Die Epi-Mono-Zerlegung von f ist als Koegalisation-Faktorisierung $A \xrightarrow{e} \text{im}(f) \xrightarrow{m} B$ mit $e = \text{coeq}(g_0, g_1)$ gegeben (s. z.B. [15]), wobei $A \xleftarrow{g_0} K \xrightarrow{g_1} A$ das Kernpaar von f ist. Charakteristischer Morphismus von $K \xrightarrow{(g_0, g_1)} A \times A$ ist $A \times A \xrightarrow{f \times f} B \times B \xrightarrow{=_{B \times B}} \Omega$, für dessen transponierten nach 0.81 $\text{Pf} \{\}_B f = \text{Pe}(\text{Pm} \{\}_B m)e = \text{Pe} \{\}_{\text{im}(f)} e$ gilt. Folglich (e epi $\Rightarrow \text{Pe}$ mono) hat man den Mono $\text{im}(f) \xrightarrow{\text{Pe} \{\}_{\text{im}(f)}} \text{PA}$.

0.83 Lemma. Das nebenstehende Diagramm kommutiert.

Beweis. Dieses Diagramm taucht im Beweis von 0.32 auf (s. z.B. [13]).

$$\begin{array}{ccc} B^A \times A & \xrightarrow{\text{ev}_{AB}} & B \\ \downarrow & & \downarrow \{\}_B \\ P(A \times B) \times A & \xrightarrow{\bar{e}_{AB}} & \text{PB} \end{array}$$

0.84 Lemma. Für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ ist das nebenstehende Diagramm kommutativ.

Beweis. Für jeden monotonen Morphismus

$\text{PA} \xrightarrow{f} \text{PB}$ hat man $\exists f \varphi_A \leq \varphi_B f$, nach

0.38 damit $\exists f \leq \exists f \varphi_A \cap_A \leq \varphi_B f \cap_A$ und somit $f \cap_A \leq \cap_B \exists f$ in Verallgemeinerung von 0.43. Für $A \xrightarrow{f} B = \text{PA} \xrightarrow{P_A} P^2 A$ folgt daraus einerseits $P_A \cap_A \leq \cap_{\text{PA}} \exists P_A$; für $A \xrightarrow{f} B = P^2 A \xrightarrow{U_A} \text{PA}$ andererseits $U_A \cap_{\text{PA}} \leq \cap_A \exists U_A$, nach 0.41 folglich $U_A \cap_{\text{PA}} \exists P_A \leq \cap_A \exists U_A \exists P_A = \cap_A$ und damit $\cap_{\text{PA}} \exists P_A \leq P_A \cap_A$.

$$\begin{array}{ccc} P^2 A & \xrightarrow{\cap_A} & \text{PA} \\ \exists P_A \downarrow & & \downarrow P_A \\ P^3 A & \xrightarrow{\cap_{\text{PA}}} & P^2 A \end{array}$$

0.85 Lemma. Aus $X \xrightarrow{(a,b)} P^2A \xrightarrow{\eta_A} PA \leq X \xrightarrow{b} PA$ folgt die Ungleichung $X \xrightarrow{a} P^2A \xrightarrow{\eta_A} PA \leq X \xrightarrow{b} PA$.

Beweis. Für den in 0.37 definierten Morphismus h_A liefert die Voraussetzung die Gleichung $X \times A \xrightarrow{(a,b) \times A} P^2A \times PA \times A \xrightarrow{h_A} \Omega = X \times A \xrightarrow{(\text{true}_{X \times A}, \bar{b})} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$. Wegen $\Rightarrow(\text{true}_{X \times A}, \bar{b}) = \bar{b}$ ergibt sich mit der Zerlegung $X \times A = X \times A \xrightarrow{(X,b) \times A} X \times PA \times A \xrightarrow{X \times p_1} X \times A$ vermöge 0.16 wegen der Ungleichung $(P^2A \times p_1)^{-1} \vee_{P^2A \times p_1} \leq P^2A \times PA \times A$ die Behauptung.

0.86 Lemma. Unter derselben Voraussetzung wie in 0.85 gilt $X \xrightarrow{a} P^2A \xrightarrow{\cup_A} PA \geq X \xrightarrow{b} PA$.

Beweis. Analog mit $\wedge(\text{true}_{X \times A}, \bar{b}) = \bar{b}$ und $(P^2A \times p_1)^{-1} \exists_{P^2A \times p_1} \geq P^2A \times PA \times A$ (s. 0.40).

0.87 Lemma. Seien (A,r) und (B,s) Relationen und $A \xrightarrow{f} B$ eine Inklusion (d.h. $\exists fr = sf$). Für die in 0.50 eingeführten transitiven Unterobjekte von A bzw. B gilt dann die Ungleichung $PB \xrightarrow{T_s B} \Omega \leq PB \xrightarrow{Pf} PA \xrightarrow{T_r A} \Omega$.

Beweis. $X \xrightarrow{b} PB \xrightarrow{T_s B} \Omega = X \xrightarrow{\text{true}_X} \Omega$ liefert $\exists s b \leq P_B b$, folglich $P \exists f \exists s b \leq P \exists f P_B b = P_A P f b$ (s. Beweis von 0.42).

Andererseits liefern $\exists f P f \leq PB$ und $\exists fr = sf$ die Ungleichung $\exists^2 f \exists r P f \leq \exists s$, somit $\exists r P f \leq P \exists f \exists s$. Insgesamt hat man damit $\exists r P f b \leq P_A P f b$, d.h. $X \xrightarrow{P f b} PA \xrightarrow{T_r A} \Omega \leq X \xrightarrow{\text{true}_X} \Omega$. Die Behauptung folgt nach 0.62.

0.88 Lemma. Ist $(A,r) \xrightarrow{f} (B,s)$ eine Inklusion, dann hat man für den in 0.52 definierten Operator $T_{A,r}$ (bzw. $T_{B,s}$) die Ungleichung $PA \xrightarrow{T_{B,s} \exists f} P^2B \leq PA \xrightarrow{\exists f \cap_A} T_{A,r} \rightarrow PB \xrightarrow{q_B} P^2B$.

Beweis. Übergang zu den transponierten liefert die zu der obigen äquivalente Ungleichung $\bar{T}_{B,s}(\exists f \times PB) = \wedge(\subset_B, (T_s B) p_1)(\exists f \times PB) \leq$

$\leq c_B(\exists f \times PB)(\cap_A T_{A,r} \times PB)$. Wegen $c_B(\exists f \times PB) = c_A(PA \times Pf)$ bleibt daher $\wedge(c_A(PA \times Pf), (T_S B)p_1) \leq c_A(\cap_A T_{A,r} \times Pf)$ zu zeigen. Für $X \xrightarrow{(a,b)} PA \times PB$ mit $\wedge(c_A(PA \times Pf), (T_S B)p_1)(a,b) = \text{true}_X$, d.h. $c_A(a, Pf b) = \text{true}_X$ und $(T_S B)b = \text{true}_X$, gilt nach 0.87 $(T_r A)Pf b = \text{true}_X$, d.h. $(T_r A)p_1(a, Pf b) = \text{true}_X$. Damit hat man aber $\text{ev}_{PA}(T_{A,r} a, Pf b) = \bar{T}_{A,r}(a, Pf b) = \text{true}_X$, woraus nach 0.85 die Ungleichung $\cap_A T_{A,r} a \leq Pf b$, d.h. $c_A(\cap_A T_{A,r} \times Pf)(a,b) = \text{true}_X$ folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

0.89 Satz. Für jede Inklusion $(A,r) \xrightarrow{f} (B,s)$ ist dieses Diagramm kommutativ, wobei $t_{A,r}$ (bzw. $t_{B,s}$) der in 0.57 definierte Morphismus ist.

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{t_{A,r}} & PA \\ \exists f \downarrow & & \downarrow \exists f \\ PB & \xrightarrow{t_{B,s}} & PB \end{array}$$

Beweis. Aus 0.88 folgt mit der Adjunktion 0.38 die Ungleichung $\exists f t_{A,r} \leq \cap_B T_{B,s} \exists f = t_{B,s} \exists f$, die zusammen mit 0.58 die Behauptung ergibt.

0.90 Lemma. Für jedes $A \in \text{Ob } \underline{E}$ kommutiert das nebenstehende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} PA \times PA & \xrightarrow{P_A \times P_A} & P^2 A \times P^2 A \\ \wedge_A \downarrow & & \downarrow \wedge_{PA} \\ PA & \xrightarrow{P_A} & P^2 A \end{array}$$

Beweis. Für die Diagonalen

$PA \xrightarrow{d_{PA}} PA \times PA$ (bzw. $d_{P^2 A}$) gilt $d_{PA} \cup_A = (\cup_A \times \cup_A) d_{P^2 A}$, woraus vermöge $d_{PA} \dashv \wedge_A$ ($d_{P^2 A} \dashv \wedge_{PA}$) und $\cup_A \dashv P_A$ (0.41) die Behauptung folgt.

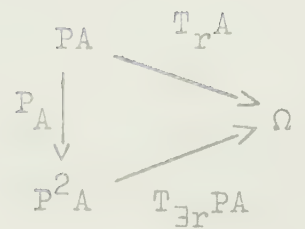
0.91 Korollar. Für jedes $A \in \text{Ob } \underline{E}$ ist das nebenstehende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} PA \times PA & \xrightarrow{c_A} & \Omega \\ P_A \times P_A \downarrow & & \downarrow c_{PA} \\ P^2 A \times P^2 A & \xrightarrow{c_{PA}} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Folgt analog zum Beweis

von 0.13 aus dem vorigen Lemma (s. 0.12), da P_A mono ist.

0.92 Lemma. Für jede Relation (A, r) mit r mono hat man die Relation $(PA, \exists r)$ und die Inklusion $(A, r) \xrightarrow{r} (PA, \exists r)$, und das nebenstehende Diagramm ist kommutativ.



Beweis. Folgt nach Def. 0.50 mit 0.14 für $f = r$ aus 0.91.

0.93 Lemma. In der Situation von 0.92 gilt die Ungleichung $PA \xrightarrow{T_{A,r}} P^2 A \xrightarrow{\exists P_A} P^3 A \leq PA \xrightarrow{\exists r} P^2 A \xrightarrow{T_{PA, \exists r}} P^3 A$.

Beweis. Die Behauptung ist per Transposition äquivalent zu $\overline{\exists P_A}(T_{A,r} \times P^2 A) \leq \wedge(c_{PA}, (T_{\exists r} PA) p_1)(\exists r \times P^2 A)$, was wieder mit der Methode 0.62 nachgewiesen werden soll. Für $X \xrightarrow{(a,b)} PA \times P^2 A$ mit $\overline{\exists P_A}(T_{A,r} a, b) = \text{true}_X$ erhält man mit 0.7 für $f = P_A$ ein $X \xrightarrow{c} PA$ mit $P_A c = b$ und $\overline{T}_{A,r}(a, c) = \wedge(c_A, (T_r A) p_1)(a, c) = \text{true}_X$, d.h. $a \leq c$ und $(T_r A)c = \text{true}_X$, folglich $\exists r a \leq \exists r c \leq P_A c = b$ und somit $c_{PA}(\exists r \times P^2 A)(a, b) = c_{PA}(\exists r a, P_A c) = \text{true}_X$. Weiterhin folgt wegen 0.92 $(T_{\exists r} PA) p_1(\exists r \times P^2 A)(a, b) = (T_{\exists r} PA)b = (T_{\exists r} PA)P_A c = (T_r A)c = \text{true}_X$; insgesamt also $\overline{T}_{PA, \exists r}(\exists r \times P^2 A)(a, b) = \text{true}_X$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

0.94 Satz. Für jede Relation $A \xrightarrow{r} PA$ (r mono) gilt $PA \xrightarrow{t_{A,r}} PA \xrightarrow{T_r A} \Omega = PA \xrightarrow{\text{true}_{PA}} \Omega$.

Beweis. Für die Inklusion $(A, r) \xrightarrow{r} (PA, \exists r)$ liefert 0.93 $\cap_{PA} T_{PA, \exists r} \exists r \leq \cap_{PA} \exists P_A T_{A,r}$, woraus sich nach Def. 0.57 vermöge 0.84 $t_{PA, \exists r} \exists r \leq P_A t_{A,r}$ ergibt. Mit 0.89 für $f = r$ folgt damit $\exists r t_{A,r} \leq P_A t_{A,r}$, nach Definition 0.50 daher die Behauptung.

0.95 Satz. Für jede Relation (A, r) gilt für den Operator 0.57 der r -transitiven Hüllen $PA \xrightarrow{t_{A,r}} PA \geq PA$.

Beweis. Aus der Definition 0.52 folgt $T_{A,r} \leq \nabla_A$, mit 0.38 daraus $PA \leq \cap_A T_{A,r} = t_{A,r}$.

0.96 Lemma. Für $A, B \in \underline{E}$ sei $B^A \twoheadrightarrow P(A \times B)$ der Mono
 0.32. Für jedes $A \xrightarrow{f} B$ ist dann das $1 \xrightarrow{\bar{f}} B^A \twoheadrightarrow P(A \times B)$
 entsprechende Unterobjekt der Graph $A \xrightarrow{(A, f)} A \times B$ von f .
Beweis. Folgt aus 0.83.

0.97 Korollar. In der gleichen Situation wie in 0.96 ist das
 $1 \xrightarrow{\bar{f}} B^A \twoheadrightarrow P(A \times B) \xrightarrow{\exists p_1} PB$ entsprechende Unterobjekt das
 Bild $\text{im}(f) \twoheadrightarrow B$ von f .

Beweis. Folgt nach 0.6
 wegen 0.96 und $p_1(A, f) =$
 $= f$ durch Anwendung von
 0.15 auf das neben-
 stehende Pullback.

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & \xrightarrow{p_1} & B \\
 \downarrow (\bar{f}!, A \times B) & & \downarrow (\bar{f}!, B) \\
 B^A \times A \times B & & B^A \times B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P(A \times B) \times A \times B & \xrightarrow{P(A \times B) \times p_1} & P(A \times B) \times B
 \end{array}$$

0.98 Bemerkung. Nach einer Mitteilung von Mikkelsen kann
 Satz 0.28 wie folgt verschärft werden:
 Es gibt keine Epimorphismen $A \twoheadrightarrow PA$.
 Für f epi ist nämlich $\exists f$ ein Koretrakt mit Pf als Retrakt.

1 . Das Universumsobjekt

Sei $\underline{E}$ ein Topos (s. 0.1). Das Axiomensystem (TOP) werde um eine Konstante $r \in \underline{E}$ mit $\text{cod}(r) = P(\text{dom}(r))$ erweitert, für die im Laufe dieses Kapitels eine Reihe von Axiomen gefordert werden.

Das erste Axiom soll intuitiv die Transitivität von $U = \text{dom}(r)$ ausdrücken:

(EXT) $U \xrightarrow{r} PU$ ist ein Monomorphismus, d.h. U ist ein Objekt mit einer extensionalen Relation $U \times U \xrightarrow{\bar{r}} \Omega$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $P^n U \xrightarrow{r_n} P^{n+1} U$ induktiv durch

1.0 Definition. $P^0 U = U$, $P^{n+1} U = P(P^n U)$ sowie $r_0 = r$, $r_{n+1} = \exists r_n$ gegeben.

1.1 Lemma. $P^n U \times P^n U \xrightarrow{\bar{r}_n} \Omega$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine extensionale Relation, d.h. alle r_n sind mono.

Beweis. Folgt wegen 0.11 aus (EXT).

1.2 Bemerkung. Die Monos r_n sind nicht epi, denn sonst wären sie im Widerspruch zu 0.28 (als Isos) split epi.

1.3 Lemma. $P^{n+1} U \times P^n U \xrightarrow{r_{n+1} \times r_n} P^{n+2} U \times P^{n+1} U \xrightarrow{\text{ev}_{P^{n+1} U}} \Omega = P^{n+1} U \times P^n U \xrightarrow{\text{ev}_{P^n U}} \Omega$ (für jedes $n \in \mathbb{N}_0$).

Beweis. Folgt aus 1.1 wegen 0.8.

1.4 Satz. Das nebenstehende

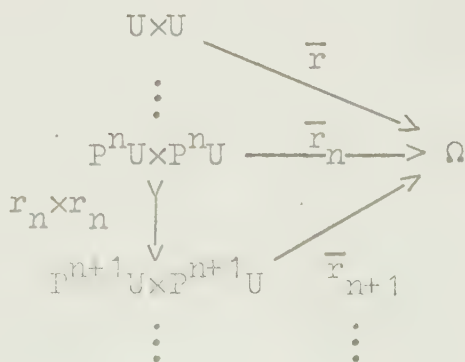
Diagramm kommutiert, d.h. man

hat eine mit den Einbettungen

$P^n U \xrightarrow{r_n} P^{n+1} U$ verträgliche

Familie von extensionalen Rela-

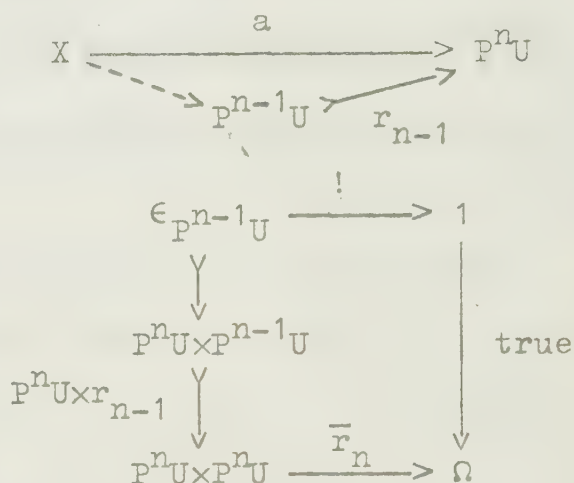
tionen $\{ P^n U \times P^n U \xrightarrow{\bar{r}_n} \Omega \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.



Beweis. Folgt sofort aus 1.3.

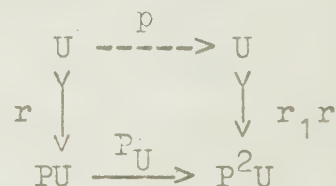
1.5 Satz. Sei (für ein $n \in \mathbb{N}$) $X \xrightarrow{a} P^n U$ ein Morphismus, für den es ein $X \xrightarrow{b} P^n U$ mit $X \xrightarrow{(b,a)} P^n U \times P^n U \xrightarrow{\bar{r}_n} \Omega =$
 $= X \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ gibt. Dann faktorisiert $X \xrightarrow{a} P^n U$ über $P^{n-1} U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$:

Beweis. Wegen 1.1 liefert 0.7 das nebenstehende Pullback. Die Voraussetzung impliziert dann die gewünschte Faktorisierung.



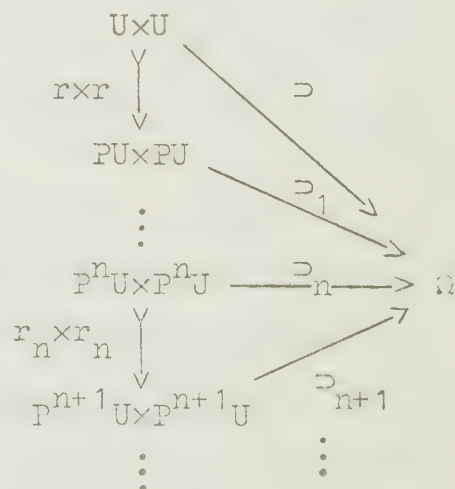
Das zweite Axiom an r bringt die Abgeschlossenheit von U bezüglich interner Potenzen zum Ausdruck:

(POT) Es gibt einen Morphismus $U \xrightarrow{p} U$,
 der das nebenstehende Diagramm kommutativ ergänzt.



1.6 Bemerkung. p ist durch (POT) eindeutig bestimmt und mono, da $r_1 r$ und P_U mono sind.

1.7 Satz. Das nebenstehende Diagramm kommutiert, wobei $\supset = \supset_0 = \overline{r p}$ und $\supset_n = \supset_{P^{n-1} U}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist. Man hat also eine Familie von mit den Einbettungen $P^n U \xrightarrow{r_n} P^{n+1} U$ verträglichen Ordnungsrelationen $\{ P^n U \times P^n U \xrightarrow{\supset_n} \Omega \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.



Beweis. Folgt für $n = 0$ aus (POT)

und für $n \in \mathbb{N}$ aus 0.13 für $A \xrightarrow{f} B = P^{n-1} U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$.

1.8 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist dieses Diagramm ein Pullback, wobei $P_0 = r_p$ und $P_n = P_{P^{n-1}U}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{r_n} & P^{n+1} U \\ r_n \downarrow & & \downarrow r_{n+1} \\ P^{n+1} U & \xrightarrow{P_{n+1}} & P^{n+2} U \end{array}$$

Beweis. Die Kommutativität des Diagramms ist für $n = 0$ das Axiom (POT) und für $n \in \mathbb{N}$ Anwendung von 0.14 mit $A \xrightarrow{f} B = P^{n-1}U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$. Sei für $X \xrightarrow{a} P^{n+1}U \xrightarrow{P_{n+1}} P^{n+2}U = X \xrightarrow{b} P^{n+1}U \xrightarrow{r_{n+1}} P^{n+2}U$ kommutativ. Übergang zum transponierten und Vorschalten von $X \xrightarrow{(X,a)} X \times P^{n+1}U$ ergibt wegen der Reflexivität von $\supset_{n+1}$ die Gleichung $X \xrightarrow{(b,a)} P^{n+1}U \times P^{n+1}U \xrightarrow{\bar{r}_{n+1}} \Omega = X \xrightarrow{\text{true}} X \rightarrow \Omega$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Anwendung von 1.5 ($n+1 \in \mathbb{N}$) liefert eine (eindeutige) Faktorisierung $X \dashrightarrow P^n U \xrightarrow{r_n} P^{n+1}U = X \xrightarrow{a} P^{n+1}U$, für die wegen der Injektivität von r_{n+1} auch die Gleichung $X \dashrightarrow P^n U \xrightarrow{P_n} P^{n+1}U = X \xrightarrow{b} P^{n+1}U$ gilt.

1.9 Korollar. Das Diagramm (POT) ist ein Pullback.

Beweis. Folgt aus 1.8 für $n = 0$, da r mono ist.

1.10 Satz. Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $X \xrightarrow{a} P^n U$ ein Morphismus,

zu dem es ein $X \xrightarrow{b} P^{n-1}U$ mit

$$X \xrightarrow{(r_{n-1}b,a)} P^n U \times P^n U \xrightarrow{\supset_n} \Omega =$$

$$= X \xrightarrow{\text{true}} X \rightarrow \Omega \text{ gibt, dann}$$

faktoriert $X \xrightarrow{a} P^n U$ über $P^{n-1}U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$.

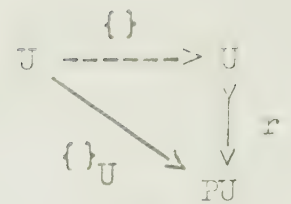
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & P^n U \\ & \searrow & \nearrow \\ & P^{n-1}U & \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U \end{array}$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt wegen der Kommutativität von 1.8 für $n-1 \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung $X \xrightarrow{(P_{n-1}b,a)} P^n U \times P^n U \xrightarrow{\bar{r}_n} \Omega = X \xrightarrow{\text{true}} X \rightarrow \Omega$, woraus nach dem Satz 1.5 die Behauptung folgt.

Aus den beiden Axiomen (EXT) und (POT) folgt die Abgeschlossenheit von U bezüglich des Singleton-Morphismus:

1.11 Satz. Singleton $U \xrightarrow{\{\}} U \rightarrow PU$

faktorisiert über $U \xrightarrow{r} PU$.



Beweis. Offensichtlich ist die

Reflexivität der Ordnungsrelation

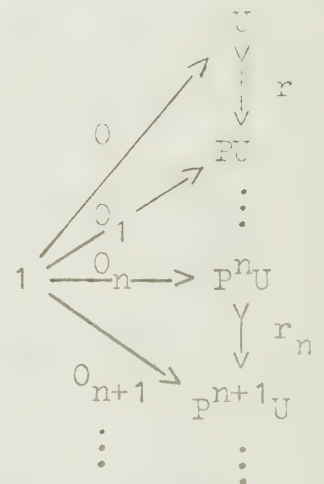
$U \xrightarrow{rp} PU$ (s. 1.7) zur Gleichung $U \xrightarrow{(rp, \{\})_U} PU \times PU \xrightarrow{\exists_U} \Omega =$
 $= U \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ äquivalent. Damit folgt die Behauptung aus dem
 vorigen Satz für $X = U$, $n = 1$, $a = \{\}_U$ und $b = p$.

Die beiden bisherigen Axiome werden trivialerweise durch den
 Monomorphismus $U \xrightarrow{r} PU = 0 \xrightarrow{\quad} 1$ erfüllt. Dieser Fall wird
 durch das folgende Axiom an $U = \text{dom}(r)$ ausgeschlossen:

(ND) Es gibt einen globalen Schnitt $1 \xrightarrow{a} U$, d.h. das Objekt
 U ist nicht degeneriert.

1.12 Satz. Das nebenstehende Diagramm

kommutiert, wobei $0_n = 0_{p^{n-1}U}$ für $n \in \mathbb{N}$,
 d.h. man hat eine mit den Einbettungen
 verträgliche Familie von "leeren
 Objekten" $\{ 1 \xrightarrow{0_n} p^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.



Beweis. Für jedes $1 \xrightarrow{a} U$ gilt
 offensichtlich $1 \xrightarrow{(ra, 0_U)} PU \times PU \xrightarrow{\exists_U} \Omega =$
 $= 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$; daher folgt die Existenz

einer Faktorisierung $1 \xrightarrow{0_1} PU = 1 \xrightarrow{0} U \xrightarrow{r} PU$ aus (ND)
 als Anwendung von 1.10 für $n = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt die
 Behauptung aus 0.18.

1.13 Definition. Sei durch $1 \xrightarrow{1} U = 1 \xrightarrow{0} U \xrightarrow{p} U$ und
 $1 \xrightarrow{1_n} p^n U = 1 \xrightarrow{0_{n-1}} p^{n-1} U \xrightarrow{p_{n-1}} p^n U$ für $n \in \mathbb{N}$ eine
 Familie $\{ 1 \xrightarrow{1_n} p^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ globaler Schnitte definiert.

1.14 Satz. Es gilt der analoge Sachverhalt wie in 1.12.

Beweis. Folgt aus der Definition 1.13 durch Zusammensetzen von 1.12 mit den Diagrammen 1.8.

1.15 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das nebenstehende Diagramm ein Pullback.

Beweis. Folgt aus 1.13 als Anwendung von 0.21 für $A = P^{n-1}U$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{!} & 1 \\ ! \downarrow & & \downarrow O_n \\ 1 & \xrightarrow{1_n} & P^n U \end{array}$$

1.16 Lemma. Es gibt eine mit den Einbettungen verträgliche Familie

$$\begin{array}{ccc} P^n U + P^n U & \xrightarrow{m_n} & P^n U \times P^n U \\ \downarrow r_n + r_n & & \downarrow r_n \times r_n \\ P^{n+1} U + P^{n+1} U & \xrightarrow{m_{n+1}} & P^{n+1} U \times P^{n+1} U \end{array}$$

von Monomorphismen $\{ P^n U + P^n U \xrightarrow{m_n} P^n U \times P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

Beweis. Aus 1.15 folgt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das Diagramm $0 \longrightarrow P^n U \xrightarrow{(P^n U, 1_n!)} P^n U \times P^n U = 0 \longrightarrow P^n U \xrightarrow{(P^n U, 0_n!)} P^n U \times P^n U$ ein Pullback ist; nach 0.22 hat man daher die Monos m_n . Die Verträglichkeit mit den Einbettungen gilt wegen 1.12 und 1.14.

1.17 Lemma. Es gibt eine mit den Einbettungen verträgliche Familie

$$\begin{array}{ccc} P^n U \times P^n U & \xrightarrow{j_n} & P(P^{n-1} U + P^{n-1} U) \\ \downarrow r_n \times r_n & & \downarrow \exists(r_{n-1} + r_{n-1}) \\ P^{n+1} U \times P^{n+1} U & \xrightarrow{j_{n+1}} & P(P^n U + P^n U) \end{array}$$

von Isomorphismen $\{ P^n U \times P^n U \xrightarrow{j_n} P(P^{n-1} U + P^{n-1} U) \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Beweis. Die j_n seien als inverse des Isomorphismus 0.24 für $A = B = P^{n-1}U$ definiert. Verträglichkeit mit den Einbettungen gilt nach 0.25 für $A_i \xrightarrow{f_i} B_i = P^{n-1}U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$.

1.18 Korollar. Es gibt eine mit den Einbettungen verträgliche Familie

$$\begin{array}{ccc} P^n U \times P^n U & \xrightarrow{l_n} & P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \\ \downarrow r_n \times r_n & & \downarrow \exists(r_{n-1} \times r_{n-1}) \\ P^{n+1} U \times P^{n+1} U & \xrightarrow{l_{n+1}} & P(P^n U \times P^n U) \end{array}$$

von Monomorphismen $\{ P^n U \times P^n U \xrightarrow{l_n} P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Beweis. Mit der Definition $l_n = \exists m_{n-1} j_n$ folgt die Behauptung aus den beiden vorigen Lemmata.

Zur Definition interner Produktoperatoren auf den Potenzen von U wird (in Anlehnung an die übliche Konstruktion) die Existenz von geordneten Paaren benötigt. Es zeigt sich, daß diesem Problem das folgende Axiom an U angemessen ist:

(PA) Es gibt einen Monomorphismus $U \times U \xrightarrow{s} U$, der das nebenstehende Diagramm kommutativ macht. (Zur Definition von l_1 siehe Beweis von 1.18.)

$$\begin{array}{ccc}
 U \times U & \xrightarrow{s} & U \\
 \downarrow r \times r & & \downarrow r \\
 P U \times P U & & P U \\
 \downarrow l_1 & \xrightarrow{\exists s} & \downarrow \\
 P(U \times U) & & P U
 \end{array}$$

1.19 Bemerkung. Bezüglich der mengentheoretischen Konstruktion eines solchen rekursiv definierten geordneten Paares sei auf [30] verwiesen. Sie basiert darauf, daß die Interpretation von $U \times U \xrightarrow{l_1} P(U \times U)$ eine fundierte Relation ist. Es sei hier nur bemerkt, daß die üblichen Definitionen von geordneten Paaren kategoriell unbefriedigend sind, da die entsprechenden Verallgemeinerungen entweder aufgrund des intuitionistischen Charakters der Topostheorie nicht notwendig Monomorphismen liefern oder da sie aus den Potenzen $P^n U$ für $n \in \mathbb{N}$ herausführen.

1.20 Satz. Das nebenstehende Diagramm kommutiert, d.h. man hat eine mit den Einbettungen verträgliche Familie von geordneten Paaren $\{ P^n U \times P^n U \xrightarrow{s_n} P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

$$\begin{array}{ccc}
 U \times U & \xrightarrow{s} & U \\
 \vdots & & \vdots \\
 P^n U \times P^n U & \xrightarrow{s_n} & P^n U \\
 \downarrow r_n \times r_n & & \downarrow r_n \\
 P^{n+1} U \times P^{n+1} U & \xrightarrow{s_{n+1}} & P^{n+1} U \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Beweis. Die s_n seien induktiv definiert: $s_0 = s$, s_{n+1} als Komposition $P^{n+1}U \times P^{n+1}U \xrightarrow{l_{n+1}} P(P^nU \times P^nU) \xrightarrow{\exists s_n} P^{n+1}U$. Wegen 1.18 und 0.11 folgt aus (PA), daß alle s_n Monomorphismen sind. Für $n = 0$ kommutiert das Diagramm: $s_1 = \exists s_0 l_1$ gilt nach (PA); für $n \in \mathbb{N}$ hat man nach Definition der s_n wegen 1.18 und 1.0 den Induktionsschluß $s_{n+1}(r_n \times r_n) = \exists s_n l_{n+1}(r_n \times r_n) = \exists s_n \exists (r_{n-1} \times r_{n-1}) l_n = \exists r_{n-1} \exists s_{n-1} l_n = r_n s_n$.

Mit Hilfe der Monomorphismen $P^{n-1}U \times P^{n-1}U \xrightarrow{s_{n-1}} P^{n-1}U$, die die Rolle von geordneten Paaren spielen, können jetzt

1.21 Definition. vermöge 0.26 für jedes $n \in \mathbb{N}$ die internen Produktoperatoren $P^nU \times P^nU \xrightarrow{q_n} P^nU$ als Komposition $P^nU \times P^nU \xrightarrow{k_{P^{n-1}U}} P(P^{n-1}U \times P^{n-1}U) \xrightarrow{\exists s_{n-1}} P^nU$ definiert werden.

Die Existenz eines entsprechenden Produktoperators für $n = 0$ wird durch folgendes Axiom sichergestellt:

(PROD) Es gibt einen Morphismus $U \times U \xrightarrow{q} U$, der dieses Diagramm kommutativ macht.
(Zur Def. von q_1 s. 1.21.)

$$\begin{array}{ccc} U \times U & \xrightarrow{q} & U \\ \downarrow r \times r & & \downarrow r \\ P U \times P U & \xrightarrow{q_1} & P U \end{array}$$

1.22 Satz. Das nebenstehende Diagramm kommutiert, d.h. man hat eine mit den Einbettungen verträgliche Familie von Produktoperatoren $\{ P^nU \times P^nU \xrightarrow{q_n} P^nU \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

$$\begin{array}{ccc} U \times U & \xrightarrow{q} & U \\ \vdots & & \vdots \\ P^nU \times P^nU & \xrightarrow{q_n} & P^nU \\ \downarrow r_n \times r_n & & \downarrow r_n \\ P^{n+1}U \times P^{n+1}U & \xrightarrow{q_{n+1}} & P^{n+1}U \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Beweis. Gilt für $n = 0$ nach

(PROD) und folgt für $n \in \mathbb{N}$ nach Definition 1.21 durch Zusammensetzen von 0.27 für $A \xrightarrow{f} B = P^{n-1}U \xrightarrow{r_{n-1}} P^{n-1}U$ mit 1.20.

Mit Hilfe der Potenzoperatoren $P^n U \xrightarrow{P} P^{n+1} U$ und der Produktoperatoren $P^n U \times P^n U \xrightarrow{q} P^n U$ können jetzt auch Exponentialoperatoren eingeführt werden, die intern die Konstruktion 0.32 nachspielen:

1.23 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $P^n U \times P^n U \xrightarrow{c} P^{n+1} U = P^n U \times P^n U \xrightarrow{(\exists^2 s_{P^n U} \circ \exists^2 s_{P^n U})} P^{n+1} U \times P^{n+1} U \xrightarrow{\wedge_{P^n U}} P^{n+1} U$, wobei $P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \xrightarrow{f} P^n U$ der in 0.31 definierte Morphismus $f_{P^{n-1} U, P^{n-1} U}$ ist (p_0 die erste Projektion auf $P^n U$).

1.24 Satz. Es gibt einen Morphismus $U \times U \xrightarrow{e} U$, der das nebenstehende Diagramm kommutativ ergänzt.

$$\begin{array}{ccc} U \times U & \xrightarrow{e} & U \\ r \times r \downarrow & & \downarrow r_1 r \\ P U \times P U & \xrightarrow{e_1} & P^2 U \end{array}$$

Beweis. Nach 1.22 und 1.8 gilt $U \times U \xrightarrow{r \times r} P U \times P U \xrightarrow{e_1} P^2 U = U \times U \xrightarrow{(r_1 r p q, \exists^2 s_{P^1 U})} P^2 U \times P^2 U \xrightarrow{\wedge_{P U}} P^2 U$, somit offensichtlich $U \times U \xrightarrow{(r_1 r p q, e_1(r \times r))} P^2 U \times P^2 U \xrightarrow{\supset_2} \Omega = U \times U \xrightarrow{\text{true}} U \times U \rightarrow \Omega$. Zweimalige sukzessive Anwendung von 1.10 liefert daher die Behauptung.

1.25 Satz. Mit $e_0 = \text{re}$ kommutiert dieses Diagramm für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. man hat eine mit den Einbettungen verträgliche Familie $\{ P^n U \times P^n U \xrightarrow{e_n} P^{n+1} U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

$$\begin{array}{ccc} P^n U \times P^n U & \xrightarrow{e_n} & P^{n+1} U \\ r_n \times r_n \downarrow & & \downarrow r_{n+1} \\ P^{n+1} U \times P^{n+1} U & \xrightarrow{e_{n+1}} & P^{n+2} U \end{array}$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung der Satz 1.24. Sei also $n \in \mathbb{N}$. Für jedes Diagramm $X \xrightarrow{c} Z \xrightarrow{b} W = X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{d} W$ hat man aufgrund der Adjunktionen $\exists c \dashv P c$ und $\exists d \dashv P d$ die Ungleichung $P b \exists d \geq \exists c P a$ (dabei bezieht sich das Zeichen " $\geq$ " auf die Ordnungsrelation $P Z \times P Z \xrightarrow{\supset_Z} \Omega$); Anwendung von 0.33 auf den Fall $A \xrightarrow{g} C = B \xrightarrow{h} D = P^{n-1} U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$ liefert daher

in Verbindung mit 0.17 für $A \xrightarrow{f} B = P^n U \xrightarrow{r_n} P^{n+1} U$ und mit 1.20 für $n-1 \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $\exists^2 s_n Pf_{n+1} \{ \}_{P^{n+1} U P_0} (r_n \times r_n) \geq r_{n+1} \exists^2 s_{n-1} Pf_n \{ \}_{P^n U P_0}$. Man überzeugt sich leicht davon, daß hieraus die Behauptung folgt, indem man den Durchschnitt mit der Gleichung $P_{n+1} q_{n+1} (r_n \times r_n) = r_{n+1} P_n q_n$ (s. 1.8 und 1.22) bildet.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat man den Operator der transitiven Hüllen

1.26 Definition. $P^n U \xrightarrow{t_n} P^n U$, der nach 0.57 für $A \xrightarrow{r} PA = P^{n-1} U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$ definiert ist.

Als weiteres Axiom an r kann jetzt die Abgeschlossenheit von U bezüglich der Bildung r -transitiver Hüllen gefordert werden:

(TRH) Es gibt einen Morphismus $U \xrightarrow{t} U$,
der das nebenstehende Diagramm
kommutativ ergänzt.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{t} & U \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ PU & \xrightarrow{t_1} & PU \end{array}$$

1.27 Satz. Dieses Diagramm
kommutiert mit $t_0 = t$ für jedes
 $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. man hat eine mit den
Einbettungen verträgliche Familie

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{t_n} & P^n U \\ r_n \downarrow & & \downarrow r_n \\ P^{n+1} U & \xrightarrow{t_{n+1}} & P^{n+1} U \end{array}$$

von Operatoren transitiver Hüllen $\{ P^n U \xrightarrow{t_n} P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung gerade das Axiom (TRH);
für $n \in \mathbb{N}$ folgt sie aus 0.89 für $f = r_{n-1}$.

Weiterhin kann man für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Vereinigungsoperator

1.28 Definition. $P^n U \xrightarrow{U} P^n U$ nach 0.59 für $A \xrightarrow{r} PA = P^{n-1} U \xrightarrow{r_{n-1}} P^n U$ betrachten. Dann hat man das potentielle Axiom

(VER) Es gibt einen Morphismus $U \xrightarrow{U} U$,
der das nebenstehende Diagramm
kommutativ ergänzt.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{U} & U \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ PU & \xrightarrow{U_1} & PU \end{array}$$

1.29 Satz. Gelten (EXT) und (POT), hat man $(TRH) \Rightarrow (VER)$.

Beweis. Nach 0.61 gilt $\supset_1(t_1, u_1) = \text{true}_{PU}$. Die Behauptung folgt daher nach 1.10 für $X = U$, $a = u_1 r$ und $b = t$.

1.30 Satz. Das nebenstehende

Diagramm kommutiert mit $U_0 = U$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. man hat

eine mit den Einbettungen verträgliche

Familie von Vereinigungsoperatoren $\{ P^n U \xrightarrow{U_n} P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

Beweis. Folgt aus 1.28 und aus 0.60 für $f = r_{n-1}$.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{U_n} & P^n U \\ r_n \downarrow & & \downarrow r_n \\ P^{n+1} U & \xrightarrow{U_{n+1}} & P^{n+1} U \end{array}$$

1.31 Bemerkung. Die Adjunktion 0.41 $U_U \dashv P_U: PU \longrightarrow P^2 U$

drückt sich auf U durch: es gilt $U \dashv p: U \longrightarrow U$ (bezüglich der Ordnung $U \times U \xrightarrow{c} \Omega$).

Beweis. Folgt vermöge 1.7 aus (POT) und 1.29.

Das vorläufig letzte Axiom soll die topostheoretische Version der Fundiertheit von r sein (siehe [37]). Eine Relation

1.32 Definition. $A \xrightarrow{r} PA$ heißt

rekursiv, wenn es zu jedem Morphismus

$PX \xrightarrow{g} X$ genau ein $A \xrightarrow{f} X$ gibt,

so daß dieses Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ r \downarrow & \exists f & \uparrow g \\ PA & \xrightarrow{\quad} & PX \end{array}$$

(FUND) $U \xrightarrow{r} PU$ ist rekursiv.

1.33 Satz. (Osius) Seien $A \xrightarrow{r} PA$ eine extensionale

Relation, $B \xrightarrow{s} PB$ eine Relation und $(B, s) \xrightarrow{i} (A, r)$ eine

Inklusion (d.h. ein Mono $B \xrightarrow{i} A$,

der das nebenstehende Diagramm kom-

mutativ ergänzt, s. 0.51). Dann gilt:

Ist r rekursiv, so auch s .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & A \\ s \downarrow & \exists i & \downarrow r \\ PB & \xrightarrow{\quad} & PA \end{array}$$

Beweis. [37], Theorem 6.3.

1.34 Korollar. $U \times U \xrightarrow{1_1(r \times r)} P(U \times U)$ ist rekursiv.

Beweis. Folgt wegen (PA) aus 1.33.

1.35 Satz. Jedes $P^n U \xrightarrow{r_n} P^{n+1} U$ ist rekursiv.

Beweis. Folgt wegen 1.0 und (FUND) durch Induktion aus [37], Satz 6.8.

1.36 Definition. Ein Objekt U in einem Topos $\underline{E}$ mit einem Morphismus $U \xrightarrow{r} P U$ heißt schwaches Universum, wenn die Axiome (EXT), (POT), (ND), (PA) und (PROD) gelten.

(U, r) heißt Vereinigungs-abgeschlossenes (fundiertes; transitiv abgeschlossenes) schwaches Universum, wenn (U, r) ein schwaches Universum ist und das Axiom (VER) ((FUND); (TRH)) gilt.

1.37 Satz. Gilt (VER), dann ist das nebenstehende Diagramm ein Pullback.

Beweis. Für $P U \xleftarrow{a} X \xrightarrow{x} U$ mit

$U_1 a = U_U \exists r a = r x$ erhält man vermöge 0.41

$\exists r a \leq P_U r x$, wegen (POT) folglich $P r \exists r a = a \leq P r P_U r x = P r \exists r r p x = r p x$. Nach 1.10 ($b = p x$) hat man damit eine Faktorisierung $X \xrightarrow{a} P U = X \dashrightarrow U \xrightarrow{r} P U$, woraus wegen der Monomorphie von r die Behauptung folgt.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{U} & U \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ P U & \xrightarrow{U_1} & P U \end{array}$$

1.38 Lemma. Das nebenstehende Diagramm ist ein Pullback.

Beweis. Jedes $X \xrightarrow{f} U$ mit $p f = 0!_X$

liefert $\text{true}_X = \sup(f, f) = \sup(f \times U)(X, f) = \text{false}_X$; damit $X = 0$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ U & \xrightarrow{p} & U \end{array}$$

1.39 Satz. Mit (EXT), (POT) und (ND) gibt es ein NNO in $\underline{E}$.

Beweis. Folgt wegen 1.38 aus [8], Theorem 5.44, weil p mono.

2. Das Universum als interne Kategorie

Sei $\underline{E}$ ein Topos. Dann ist durch folgende Daten (s. [6], [46])

2.0 Definition. eine interne Kategorie in $\underline{E}$ gegeben:

- i) zwei Objekte A und A' aus $\underline{E}$,
 - ii) zwei Morphismen $A \xleftarrow{\text{dom}} A' \xrightarrow{\text{cod}} A$ mit einem gemeinsamen Koretrakt $A \xrightarrow{\text{id}} A'$, und
 - iii) ein Morphismus $A'' \xrightarrow{\text{comp}} A'$
 - wobei A'' durch das nebenstehende Pullback gegeben ist - ,
 - der folgenden Bedingungen genügt:
- a) $\text{dom comp} = \text{dom dom}'$ und $\text{cod comp} = \text{cod cod}'$,

b) $\text{comp } g_0 = A' = \text{comp } g_1$, wobei g_0 und $g_1: A' \longrightarrow A''$ durch die Gleichungen $\text{cod}(\text{id dom}) = \text{dom}$ bzw. $\text{cod} = \text{dom}(\text{id cod})$ geliefert werden,

c) und $\text{comp } h_0 = \text{comp } h_1$, wobei h_0 und $h_1: A''' \longrightarrow A''$ (s. nebenstehendes Pullback) vermöge der Gleichungen

$\text{cod}(\text{comp dom}'') = \text{dom}(\text{cod}' \text{cod}'')$ bzw. $\text{cod}(\text{dom}' \text{dom}'') = \text{dom}(\text{comp cod}'')$ definiert sind.

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\text{cod}'} & \\
 A'' & \xrightarrow{\quad} & A' \\
 \downarrow \text{dom}' & & \downarrow \text{dom} \\
 A' & \xrightarrow{\quad} & A
 \end{array}$$
- (s. nebenstehendes Pullback)

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\text{cod}''} & \\
 A''' & \xrightarrow{\quad} & A'' \\
 \downarrow \text{dom}'' & & \downarrow \text{dom}' \\
 A'' & \xrightarrow{\quad} & A'
 \end{array}$$

2.1 Bemerkung. Die intuitive Bedeutung der angegebenen Daten liegt auf der Hand. Man sieht leicht, daß sie gerade das Axiomensystem der elementaren Theorie abstrakter Kategorien nach [19] widerspiegeln. - Auf die im Kalkül der Bikategorien zu formulierende elegantere Fassung der Definition interner Kategorien (s. [6] und [15]) soll hier nicht näher eingegangen werden.

2.2 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert die nebenstehende Faktorisierung.

$$\begin{array}{ccc} P^n U \times P^n U & \xrightarrow{e} & P^{n-1} U \\ & \searrow e_n^* & \uparrow \exists^2 s_{n-1} \\ & & P^2(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \end{array}$$

Beweis. Definition 1.21 der

q_n und Satz 0.14 für $A \xrightarrow{f} B = P^{n-1} U \times P^{n-1} U \xrightarrow{s_{n-1}} P^{n-1} U$ liefern $P_n q_n = \exists^2 s_{n-1} P^{n-1} U \times P^{n-1} U \times P^{n-1} U$; daraus folgt mit 0.12 für $A \xrightarrow{f} B = P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \xrightarrow{\exists s_{n-1}} P^n U$ die Behauptung nach der Definition 1.23 der e_n .

2.3 Lemma. Für

jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

das nebenstehende

Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} P^n U \times P^n U \times P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) & \xrightarrow{\bar{e}_n^*} & \Omega \\ \downarrow \exists s_{n-1} & & \uparrow \\ P^n U \times P^n U \times \exists s_{n-1} & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Folgt aus 2.2 mit Hilfe von 0.8 für $f = s_{n-1}$ sowie 0.7 für $f = \exists s_{n-1}$.

2.4 Definition. Seien

durch das nebenstehende

Pullback für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

ein Objekt E'_n und Morphismen

$P^n U \xleftarrow{\text{dom}_n} E'_n \xrightarrow{\text{cod}_n} P^n U$ sowie $E'_n \xrightarrow{\text{rel}_n} P^n U$ definiert.

$$\begin{array}{ccc} E'_n & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (\text{dom}_n, \text{cod}_n, \text{rel}_n) & & \downarrow \text{true} \\ P^n U \times P^n U \times P^n U & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \Omega \end{array}$$

2.5 Lemma. Das folgende Diagramm ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Pullback:

$$\begin{array}{ccc} E'_n & \xrightarrow{E'_n} & E'_n \\ \downarrow (\text{dom}_n, \text{cod}_n, \text{rel}_n^*) & & \downarrow (\text{dom}_n, \text{cod}_n, \text{rel}_n) \\ P^n U \times P^n U \times P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) & \xrightarrow{P^n U \times P^n U \times \exists s_{n-1}} & P^n U \times P^n U \times P^n U \end{array}$$

Beweis. Wegen der Monomorphie von $P^n U \times P^n U \times \exists s_{n-1}$ reicht es offenbar zu zeigen, daß eine Faktorisierung $E'_n \xrightarrow{\text{rel}_n} P^n U = E'_n \xrightarrow{\text{rel}_n^*} P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \xrightarrow{\exists s_{n-1}} P^n U$ existiert. Das folgt

aber aus 2.4 vermöge $\bar{e}_n = \exists^2 s_{n-1}(e_n^* \times P^n U)$ (s. Beweis von 2.3):

2.6 Korollar. Dieses

Diagramm ist

für jedes $n \in \mathbb{N}$

ein Pullback.

$$\begin{array}{ccc} E'_n & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (dom_n, cod_n, rel_n^*) & & \downarrow \text{true} \\ P^n U \times P^n U \times P^n U & \xrightarrow{\bar{e}_n^*} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Folgt vermöge 2.3 aus 2.4 und 2.5.

2.7 Lemma. Für jedes

$n \in \mathbb{N}_0$ kommutiert das neben-

stehende Diagramm, d.h. man

hat eine mit den Einbettun-

gen verträgliche Familie $\{ P^n U \times P^n U \times P^n U \xrightarrow{\bar{e}_n} \Omega \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

$$\begin{array}{ccc} P^n U \times P^n U \times P^n U & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \Omega \\ \downarrow r_n \times r_n \times r_n & & \downarrow \\ P^{n+1} U \times P^{n+1} U \times P^{n+1} U & \xrightarrow{\bar{e}_{n+1}} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Einfache Umformung von 1.25 mit Hilfe von 1.3

2.8 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $E'_n \xrightarrow{r'_n} E'_{n+1}$

so, daß die in 2.4 definierten Morphismen mit den Einbettungen

verträgliche Familien $\{ P^n U \xleftarrow{dom_n} E'_n \xrightarrow{cod_n} P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$

bzw. $\{ E'_n \xrightarrow{rel_n} P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ bilden.

Beweis. Die $E'_n \xrightarrow{r'_n} E'_{n+1}$ werden durch das Pullback

$$\begin{array}{ccc} E'_n & \xrightarrow{r'_n} & E'_{n+1} \\ \downarrow (dom_n, cod_n, rel_n) & & \downarrow (dom_{n+1}, cod_{n+1}, rel_{n+1}) \\ P^n U \times P^n U \times P^n U & \xrightarrow{r_n \times r_n \times r_n} & P^{n+1} U \times P^{n+1} U \times P^{n+1} U \end{array}$$

definiert, was wegen 2.7 nach Definition 2.4 möglich ist.

2.9 Lemma. Analog zu 2.5

hat man mit $E'_0 = U'$, $r'_0 = r'$

und $rel_0 = rel$ für $n = 0$ die

nebenstehende Faktorisierung.

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{rel} & U \\ \downarrow rel_1^* r' & & \downarrow r \\ P(U \times U) & \xrightarrow{\exists s} & P U \end{array}$$

Beweis. Folgt aus 2.5 (für $n = 1$) und aus 2.8 (für $n = 0$).

2.10 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $P^n U \xrightarrow{s'_n} P^n U$ die Komposition $P^n U \xrightarrow{\exists d_{n-1}} P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \xrightarrow{\exists s_{n-1}} P^n U$, wobei $P^{n-1} U \xrightarrow{d_{n-1}} P^{n-1} U \times P^{n-1} U$ die Diagonale bezeichnet.

2.11 Lemma. Es gibt einen Morphismus $U \xrightarrow{s'_1} U$ (notwendig mono), der das nebenstehende Diagramm kommutativ ergänzt.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{s'_1} & U \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ P U & \xrightarrow{s'_1} & P U \end{array}$$

Beweis. 0.63 für $A = U$ in Verbindung mit 0.13 für $A \xrightarrow{f} B = U \times U \xrightarrow{s} U$ liefert nach Definition 1.21 von $q_1 = \exists s k_U$ die Beziehung $P U \xrightarrow{(q_1 d_{P U}, \exists s \exists d_U)} P U \times P U \xrightarrow{\exists 1} \Omega = P U \xrightarrow{\text{true}} \Omega$. Durch Vorschalten von $U \xrightarrow{r} P U$ erhält man vermöge $(r \times r) d_U = d_{P U} r$ wegen (PROD) daraus $U \xrightarrow{(r q d_U, \exists s \exists d_U r)} P U \times P U \xrightarrow{\exists 1} \Omega = P U \xrightarrow{\text{true}} \Omega$. Nach 1.10 für $n = 1$ und $X = U$ folgt die Behauptung daher mit $a = s'_1 = \exists s \exists d_U$ und $b = q d_U$.

2.12 Satz. 2.10 und 2.11

liefern mit $s'_0 = s'$ eine mit den Einbettungen verträgliche Familie $\{ P^n U \xrightarrow{s'_n} P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{s'_n} & P^n U \\ r_n \downarrow & & \downarrow r_n \\ P^{n+1} U & \xrightarrow{s'_{n+1}} & P^{n+1} U \end{array}$$

Beweis. Die Kommutativität des Diagramms ist für $n = 0$ gerade Lemma 2.11; für $n \in \mathbb{N}$ folgt sie aus der Gleichung $d_n r_{n-1} = (r_{n-1} \times r_{n-1}) d_{n-1}$ und aus 1.20.

2.13 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das nebenstehende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ (P^n U, P^n U, \exists d_{n-1}) \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P^n U \times P^n U \times P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) & \xrightarrow{\bar{e}_n^*} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Der Übersichtlichkeit halber werde in diesem Beweis $P^{n-1} U \times P^{n-1} U = B_{n-1}$ gesetzt. Offenbar (s. 2.2 und 1.23) ist $\bar{e}_n^*$

dann Durchschnitt der beiden Morphismen $\supset_{B_{n-1}}(k_{P^{n-1}U \times PB_{n-1}})$ und $ev_{PB_{n-1}}(Pf_n\{\}_{P^{n-1}U \times PB_{n-1}})(p_0 \times PB_{n-1})$, die nach $(P^n U, P^n U, \exists d_{n-1})$ ausgeführt - nach 0.63 sowie 0.65 für $A = P^{n-1}U$ - beide mit $P^n U \xrightarrow{true} P^n U \rightarrow \Omega$ übereinstimmen.

2.14 Korollar. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ kommutiert dieses Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ (P^n U, P^n U, s'_n) \downarrow & & \downarrow true \\ P^n U \times P^n U \times P^n U & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Folgt für $n \in \mathbb{N}$

durch Zusammensetzen von 2.13 mit 2.3 (s. 2.10). Dieses Ergebnis für $n = 1$ in Verbindung mit 2.7 für $n = 0$ liefert vermöge 2.11 die Behauptung auch für $n = 0$.

Das Pullback 2.4 liefert daher

2.15 Definition. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen (eindeutig bestimmten) Morphismus

$$P^n U \xrightarrow{id_n} E'_n \text{ so,}$$

daß dieses Diagramm

kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{id_n} & E'_n \\ (P^n U, P^n U, s'_n) \searrow & & \downarrow \text{ } (\text{dom}_n, \text{cod}_n, \text{rel}_n) \\ & & P^n U \times P^n U \times P^n U \end{array}$$

2.16 Satz. 2.15 liefert eine mit den Einbettungen verträgliche Familie $\{ P^n U \xrightarrow{id_n} E'_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{id_n} & E'_n \\ r_n \downarrow & & \downarrow r'_n \\ P^{n+1} U & \xrightarrow{id_{n+1}} & E'_{n+1} \end{array}$$

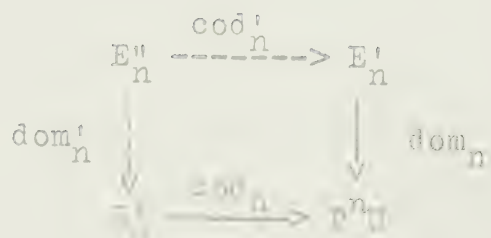
Beweis. Durch Komposition dieses

Diagramms mit 2.8 erhält man wegen 2.12 stets ein kommutatives Diagramm. Die Behauptung folgt daraus wegen der Monomorphie von $E'_{n+1} \xrightarrow{(\text{dom}_{n+1}, \text{cod}_{n+1}, \text{rel}_{n+1})} P^{n+1} U \times P^{n+1} U \times P^{n+1} U$.

2.17 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelten die Gleichungen $P^n U \xrightarrow{id_n} E'_n \xrightarrow{\text{dom}_n} P^n U = P^n U \xrightarrow{id_n} E'_n \xrightarrow{\text{cod}_n} P^n U = P^n U$.

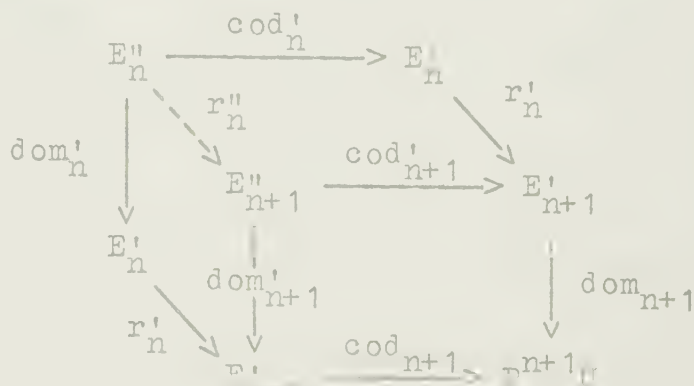
Beweis. Folgt direkt aus der Definition 2.15 von id_n .

2.18 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien $E''_n \xrightarrow{\text{dom}'_n} E'_n$ und $E''_n \xrightarrow{\text{cod}'_n} E'_n$ durch das nebenstehende Pullback gegeben.



2.19 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es einen Monomorphismus $E''_n \xrightarrow{r''_n} E''_{n+1}$ so, daß 2.18 mit den Einbettungen verträgliche Familien $\{ E'_n \xleftarrow{\text{dom}'_n} E''_n \xrightarrow{\text{cod}'_n} E'_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ definiert.

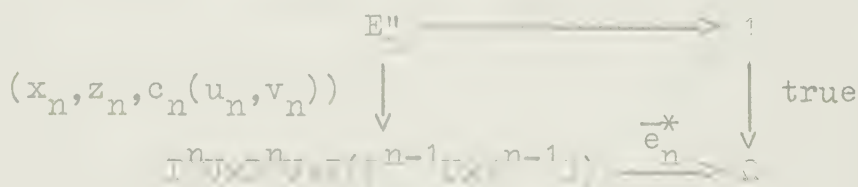
Beweis. Wegen 2.8 sind durch das nebenstehende Diagramm die r''_n vermöge der Pullbackeigenschaft von 2.18 gegeben. Wegen



$(r'_n \times r'_n)(\text{dom}'_n, \text{cod}'_n) = (\text{dom}'_{n+1}, \text{cod}'_{n+1})r''_n$ sind alle r''_n mono, weil $E''_n \xrightarrow{(\text{dom}'_n, \text{cod}'_n)} E'_n \times E'_n$ stets mono ist.

2.20 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien $x_n = \text{dom}_n \text{dom}'_n$, $z_n = \text{cod}_n \text{cod}'_n$; $u_n = \text{rel}^*_{\text{dom}'_n}$, $v_n = \text{rel}^*_{\text{cod}'_n}$ sowie c_n die in 0.66 definierte relationale Komposition ($n \in \mathbb{N}$) für $A = B = C = P^{n-1}U$. Dann

kommutiert für



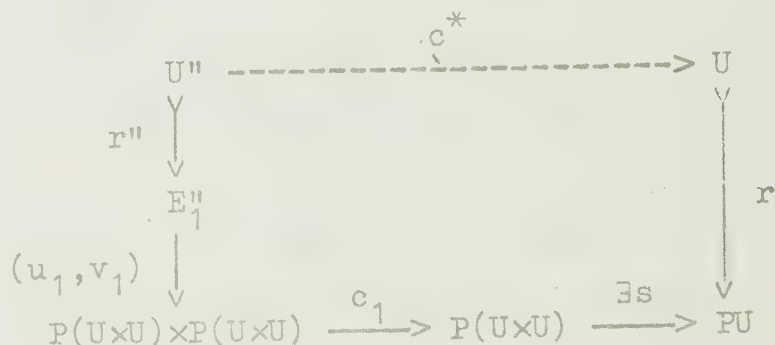
jedes $n \in \mathbb{N}$

dieses Diagramm.

Beweis. Sei wieder $P^{n-1}U \times P^{n-1}U = B_{n-1}$. Weil $\bar{e}_n^*$ Durchschnitt von $\supset_{B_{n-1}}(k_{P^{n-1}U} \times p_{B_{n-1}})$ und $\text{ev}_{P^{n-1}U}(p_{P^{n-1}U} \times p_{B_{n-1}})$ ist (s. 2.13), reicht es wegen $\text{ev}_{P^{n-1}U}(p_{P^{n-1}U} \times p_{B_{n-1}})(\{\}_{P^{n-1}U} \times p_{B_{n-1}}) = \text{ev}_{P^{n-1}U}(P^{n-1}U \times f_n)(\{\}_{P^{n-1}U} \times p_{B_{n-1}}) = \text{ev}_{P^{n-1}U}(\{\}_{P^{n-1}U})(p_0 \times f_n) = \text{ev}_{P^{n-1}U}(p_0 \times f_n)$ zu zeigen, daß $k_{P^{n-1}U}(x_n, z_n) \geq c_n(u_n, v_n)$ sowie $f_n c_n(u_n, v_n) = x_n$ gelten. Wegen 2.6 hat man aufgrund eben dieser

Überlegung $k_{P^{n-1}U}(\text{dom}_n, \text{cod}_n) \geq \text{rel}_n^*$ sowie $f_n \text{rel}_n^* = \text{dom}_n$,
woraus mit $y_n = \text{cod}_n \text{dom}_n' = \text{dom}_n \text{cod}_n'$ erstens die Ungleichungen
 $k_{P^{n-1}U}(x_n, y_n) \geq u_n$ und $k_{P^{n-1}U}(y_n, z_n) \geq v_n$, sowie zweitens die
Gleichungen $f_n u_n = x_n$ und $f_n v_n = y_n$ folgen. Anwendung von
0.70 und 0.76 liefert daher die Behauptung.

2.21 Lemma. Mit
 $E''_0 = U''$ und $r''_0 = r''$
gibt es einen Morphismus
 $U'' \xrightarrow{*} U$, der das
nebenstehende Diagramm
kommutativ ergänzt.



Beweis. Nach dem vorigen Lemma hat man $c_1(u_1, v_1) \leq k_{PU}(x_1, z_1)$,
 $\text{dom}_1(x_1, z_1) \leq \text{rel}_1^*(x_0, z_0)$.
 $q_1 = \exists s k_{PU}$ und (PROD) liefern dann $\exists s c_1(u_1, v_1) r'' \leq r q(x_0, z_0)$,
woraus durch Anwendung von 1.10 für $n = 1$, $X = U''$ mit $b =$
 $= q(x_0, z_0)$ die Behauptung folgt.

2.22 Korollar. Das neben-
stehende Diagramm kommutiert.



Beweis. Vermöge 2.7, 2.8 und
2.9 für $n = 0$ und 2.3 für

$n = 1$ hat man $\bar{e}_0(x_0, z_0, c^*) = \bar{e}_1^*(x_1, z_1, c_1(u_1, v_1))$. 2.20 für
 $n = 1$ liefert daher die Behauptung.

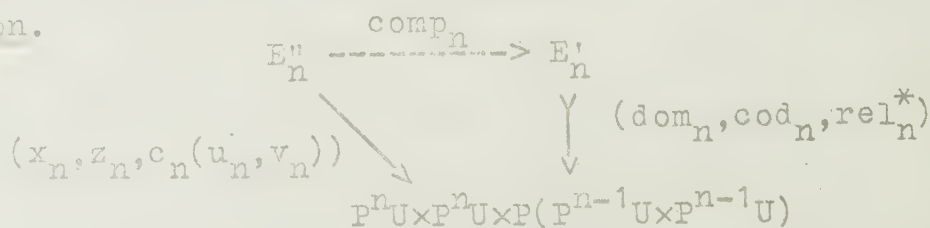
Die Pullbacks 2.6 bzw. 2.4 liefern damit für

2.23 Definition.

jedes $n \in \mathbb{N}$

bzw. $n = 0$

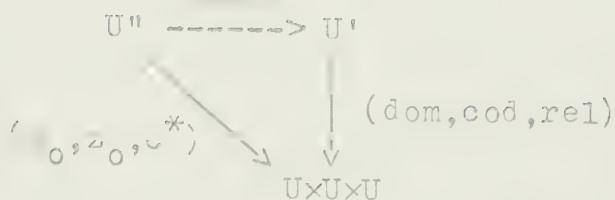
einen (eindeutig



bestimmten) Morphismus

$$E'' \xrightarrow{\text{comp}} E'$$

die jeweiligen Diagramme kommutativ macht.



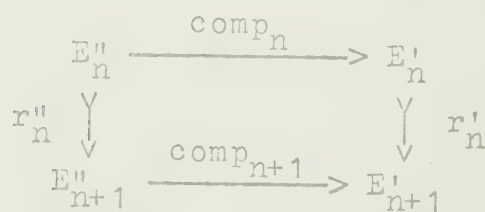
2.24 Satz. Das nebenstehende

Diagramm kommutiert für jedes

$n \in \mathbb{N}_0$, d.h. 2.23 definiert eine

mit den Einbettungen verträgliche

Familie von Kompositionsmorphismen $\{ E''_n \xrightarrow{\text{comp}_n} E'_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.



Beweis. Folgt mit Hilfe von 2.8, 2.5 und 1.20 sowie 2.19 und

0.67 aus der Definition 2.23 wegen der Monomorphie von

$$E'_{n+1} \xrightarrow{(\text{dom}_{n+1}, \text{cod}_{n+1}, \text{rel}_{n+1})} P^{n+1}U \times P^{n+1}U \times P^{n+1}U$$

2.25 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelten die Gleichungen

$$E''_n \xrightarrow{\text{comp}_n} E'_n \xrightarrow{\text{dom}_n} P^n U = E''_n \xrightarrow{\text{dom}'_n} E'_n \xrightarrow{\text{dom}_n} P^n U \quad \text{bzw.}$$

$$E''_n \xrightarrow{\text{comp}_n} E'_n \xrightarrow{\text{cod}_n} P^n U = E''_n \xrightarrow{\text{cod}'_n} E'_n \xrightarrow{\text{cod}_n} P^n U.$$

Beweis. Mit Def. von x_n und z_n (2.20) unmittelbar nach 2.23.

Resultat aller dieser Überlegungen ist das

2.26 Theorem. Ist U ein schwaches Universum (s. 1.36),

dann bilden die Potenzen $E_n = P^n U$ von U für alle $n \in \mathbb{N}_0$

interne Kategorien in $\underline{E}$.

Beweis. (vgl. Definition 2.0) Die Objektobjekte sind $E_n = P^n U$,

die Morphismenobjekte E'_n mit den Morphismen $E'_n \xrightarrow{\text{dom}_n} E_n$

(Quelle) und $E'_n \xrightarrow{\text{cod}_n} E_n$ (Ziel) sind durch 2.4 definiert.

Die in 2.15 gegebenen Identitätsmorphismen $E_n \xrightarrow{\text{id}_n} E'_n$ sind

Koretrakte von dom_n und cod_n (s. 2.17). Die Kompositions-

morphismen $E''_n \xrightarrow{\text{comp}_n} E'_n$ sind in 2.23 definiert; sie erfüllen

die Bedingung iii) a) (s. 2.23).

Der Nachweis von b) und c) erfordert keine neuen Konstruktionen; er sei dem geneigten Leser überlassen.

2.27 Korollar. Mit der Definition

- (KAT) i) $\text{Mor}\underline{E}_n = \underline{E}(1, E'_n) \subset \underline{E}$ als Morphismenbereich,
 ii) $\underline{E}(1, \text{id}_{n \text{ dom}_n})$ bzw. $\underline{E}(1, \text{id}_{n \text{ cod}_n}): \text{Mor}\underline{E}_n \longrightarrow \text{Mor}\underline{E}_n$ als Operatoren Quelle bzw. Ziel,
 iii) $\text{Ob}\underline{E}_n = \underline{E}(1, \text{id}_n)[\underline{E}(1, E'_n)] = \text{Bildbereich der in ii) definierten Operatoren} \subset \text{Mor}\underline{E}_n$ als Objektbereich, und
 iv) $\underline{E}(1, \text{comp}_n)$ als Kompositionsoperator für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

sind alle $\underline{E}_n$ Kategorien (im Sinne von [19]).

Beweis. Einfache Übersetzung von 2.26.

Offensichtlich haben die $\underline{E}_n$ wesentlich mehr Struktur als nur die internen Kategorien. In einem in dieser Arbeit nicht näher zu präzisierenden Sinn besitzen sie - abgesehen von der fehlenden Abgeschlossenheit gegen Potenzen und Exponenten für $n \in \mathbb{N}$ - alle Eigenschaften, die interne Versionen entsprechender Toposaxiome darstellen. Es seien hier nur einige Konstruktionen angedeutet, um den Sinn dieser orakelhaften Bemerkung zu erläutern.

Beispielsweise spielt $1 \xrightarrow{!n} \underline{E}_n$ (s. 1.13) intern die Rolle eines finalen Objektes:

2.28 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $\underline{E}_n \xrightarrow{!n} \underline{E}'_n$ mit $\underline{E}_n \xrightarrow{!n} \underline{E}'_n \xrightarrow{\text{dom}_n} \underline{E}_n = \underline{E}_n$ und $\underline{E}_n \xrightarrow{!n} \underline{E}'_n \xrightarrow{\text{cod}_n} \underline{E}_n = \underline{E}_n \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{!n} \underline{E}_n$, der intuitiv jedem Objekt den Morphismus in das finale Objekt zuordnet.

Die Existenz dieses Operators erhält man aus 2.4 aufgrund des folgenden

2.29 Lemma. Das
nebenstehende
Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} P^n U & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ (P^n U, 1_n!, q_n(P^n U, 1_n!)) & \downarrow & \downarrow \text{true} \\ P^n U \times P^n U \times P^n U & \xrightarrow{q_n} & \Omega \end{array}$$

Die Produktoperatoren $E_n \times E_n \xrightarrow{q_n} E_n$ (1.21) liefern wie folgt
intern ein kategorielles Produkt:

2.30 Definition. Sei $E_n^<$ für
jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch das neben-
stehende Pullback erklärt (intuitiv:
Paare von Pfeilen mit gleicher Quelle).

$$\begin{array}{ccc} E_n^< & \xrightarrow{\text{cod}_n^<} & E_n' \\ \text{dom}_n^< \downarrow & & \downarrow \text{dom}_n \\ E_n' & \xrightarrow{\text{dom}_n} & E_n \end{array}$$

2.31 Lemma. Mit $b_{in} = \exists s_{n-1} \exists (s_{n-1}, p_i) k_{P^{n-1}U}$ für $i = 0, 1$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $E_n \times E_n \xrightarrow{(q_n, p_i, b_{in})} E_n \times E_n \times E_n \xrightarrow{\bar{e}_n} \Omega =$
 $= E_n \times E_n \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ (analog zu 2.11 auch für $n = 0$).

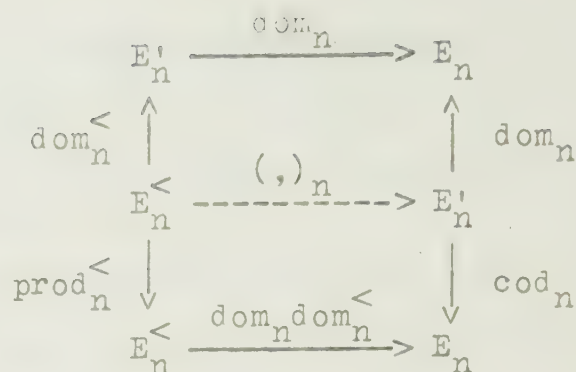
2.32 Korollar. Vermöge 2.4
resultieren daraus Operatoren
 $E_n \times E_n \xrightarrow{\text{proj}_{in}} E_n' \quad (i = 0, 1),$
die das nebenstehende Diagramm
kommutativ machen, d.h. die intuitiv
jedem Paar von Objekten die Pro-
jektionen aus dem Produkt zuordnen.
Vermöge 2.30 induzieren sie einen
Operator $E_n \times E_n \xrightarrow{\text{prod}_n} E_n^<$,
für den das nebenstehende Diagramm
kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} & q_n \nearrow & E_n \\ E_n \times E_n & \xrightarrow{\text{proj}_{in}} & E_n' \\ & p_i \searrow & E_n \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{dom}_n \\ \uparrow \\ \text{cod}_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{proj}_{0n} \nearrow & E_n' \\ E_n \times E_n & \xrightarrow{\text{prod}_n} & E_n^< \\ & \text{proj}_{1n} \searrow & E_n' \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{dom}_n^< \\ \uparrow \\ \text{cod}_n^< \end{array}$$

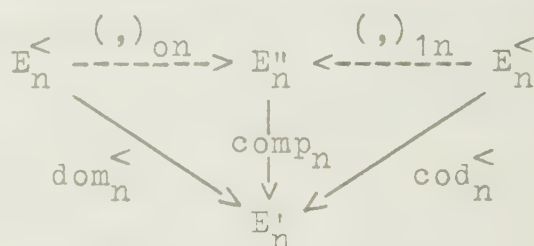
2.33 Satz. Sei $E_n^< \xrightarrow{\text{prod}_n^<} E_n^<$ als Komposition
 $E^< \xrightarrow{(\text{cod}_n^<, \text{dom}_n^<, \text{cod}_n^<, \text{cod}_n^<)} \times \xrightarrow{\text{prod}_n^<} E_n^<$ definiert. Man kann
dann für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen Operator $E_n^< \xrightarrow{(\quad)_n} E_n'$ konstru-
ieren, der folgende Eigenschaften hat, durch die er eindeutig

bestimmt ist: erstens ergänzt er das nebenstehende Diagramm kommutativ, d.h. er ordnet intuitiv jedem Paar von Pfeilen mit gleicher Quelle einen Pfeil in das Produkt der Ziele zu.



Das untere Teildiagramm liefert dann vermöge 2.18 wegen 2.30 zwei Morphismen $E_n^< \xrightarrow{(\cdot)_{on}} E'_n$ und $E_n^< \xrightarrow{(\cdot)_{1n}} E'_n$ mit $\text{dom}_n'(\cdot)_{on} = \text{dom}_n'(\cdot)_{1n} = (\cdot)$ sowie

$\text{cod}_n'(\cdot)_{on} = \text{dom}_n^< \text{prod}_n^<$ und $\text{cod}_n'(\cdot)_{1n} = \text{cod}_n^< \text{prod}_n^<$, für



die zweitens das nebenstehende

Diagramm kommutativ ist. Man sieht

leicht, daß hierdurch intuitiv die universelle Eigenschaft des Produktes wiedergegeben wird.

Mit Hilfe dieser Konstruktionen kann man noch einen Schritt weitergehen und die $E_n \times E_n \xrightarrow{q_n} E_n$ zu internen Funktoren (s. z.B. [46]) fortsetzen, die adjungiert zum jeweiligen Diagonalfunktor sind. Untersuchungen dieser Art bleiben einer späteren Arbeit vorbehalten.

2.34 Bemerkung. Durch entsprechende Überlegungen lassen sich mit Hilfe der geordneten Paare $E_n \times E_n \xrightarrow{s_n} E_n$ (siehe 3.20) $E_n \times E_n \xrightarrow{\text{inj}_i} E'_n$ ($i = 0, 1$) und $E_n \times E_n \xrightarrow{\text{sum}} E_n^>$ (wobei $E_n^>$ das Pullback von $E'_n \xrightarrow{\text{cod}_n} E_n \xleftarrow{\text{cod}_n} E'_n$ ist) definieren, die den dualen Sachverhalt für Summen (Koprodukte) widerspiegeln.

Auf ähnliche Weise lassen sich Egalisatoren intern beschreiben.

Als Hilfsmittel wird dazu der Durchschnitt benötigt:

2.35 Lemma. Man hat eine Familie von Durchschnittsoperatoren $\{ P^n U \times P^n U \xrightarrow{\wedge_n} P^n U \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$, die mit den r_n verträglich sind.

Beweis. Folgt aus Lemma 0.12; wegen $\wedge_U \leq p_0$ erhält man die Ungleichung $U \times U \xrightarrow{\wedge_U(r \times r)} PU \leq U \times U \xrightarrow{rp_0} PU$, folglich als Anwendung von 1.10 eine Faktorisierung $U \times U \xrightarrow{r \times r} PU \times PU \xrightarrow{\wedge_U} PU = U \times U \xrightarrow{\wedge} U \xrightarrow{r} PU$.

2.36 Satz. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das Objekt der Paare von Morphismen mit gleicher Quelle und gleichem Ziel durch das nebenstehende Pullback definiert. Sei

$$\begin{array}{ccc} E_n^- & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_n' \\ \downarrow & (\text{dom}_n, \text{cod}_n) & \downarrow (\text{dom}_n, \text{cod}_n) \\ E_n' & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_n' \times E_n' \end{array}$$

weiterhin (für $n \in \mathbb{N}$ als Komposition von $E_n^- \xrightarrow{\quad\quad\quad} E_n' \times E_n'$ mit $E_n' \times E_n' \xrightarrow{p^{n-1} U \times p^{n-1} U} P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U)$ und dem Vorbereich $P(P^{n-1} U \times P^{n-1} U) \xrightarrow{\exists p_0} P^n U$, für $n = 0$ hieraus vermöge 1.10 mittels der üblichen Methode) für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der Ko-
inidenzmorphismus $E_n^- \xrightarrow{\text{coin}_n} E_n$ gegeben. Mit $E_n^- \xrightarrow{g_n} E_n = E_n^- \xrightarrow{\quad\quad\quad} E_n' \times E_n' \xrightarrow{\wedge_n(\text{rel}_n \times \text{rel}_n)} E_n$ hat man dann die Gleichung $\bar{e}_n(\text{coin}_n, \text{dom}_n^-, g_n) = \text{true}_{E_n^-}$,

woraus sich nach 2.4 ein Operator $E_n^- \xrightarrow{\text{eq}_n} E_n'$ ergibt, für den das nebenstehende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} E_n^- & \xrightarrow{\text{eq}_n} & E_n' \\ & \searrow \text{dom}_n^- & \downarrow \text{cod}_n \\ & & E_n \end{array}$$

Definiert man $E_n^{-''}$ durch das untere Pullback, kann man vermöge eines geeigneten Operators $E_n^{-''} \xrightarrow{\quad\quad\quad} E_n'$ Egalisatoren intern beschreiben.

$$\begin{array}{ccc} E_n^{-''} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_n'' \\ \downarrow & (\text{comp}_n, \text{dom}_n') & \downarrow (\text{comp}_n, \text{dom}_n') \\ E_n'' & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_n' \times E_n' \end{array}$$

In diesem Sinne gilt das

2.37 Theorem. Die internen Kategorien E_n sind für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ intern endlich vollständig.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei ein Ausdruck ϕ_n^* in der elementaren Sprache des Topos $\underline{E}$ erklärt durch die folgende

3.0 Definition. $\phi_n^*(a, m)$ gelte genau dann, wenn $a \in \underline{E}_{n+1} = \underline{E}(1, \underline{E}_{n+1})$ (s. 2.27; $\underline{E}_k = P^k U$, s. 2.26), $m \in \text{Sub}(\underline{E}_n)$ und $\text{ch}(m) = \bar{a}$ gelten,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ m \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P^n U & \xrightarrow{\bar{a}} & \Omega \end{array}$$

und wenn das obenstehende Diagramm das kanonische Pullback ist.

3.1 Bemerkung. Wegen (TOP) (s. 0.1 und 0.2) ist ϕ_n^* stets funktional, d.h. die Definition 3.0 liefert für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen Operator $\phi_n^*: \underline{E}_{n+1} \longrightarrow \text{Sub}(\underline{E}_n)$. Im folgenden wird dabei grundsätzlich der einem Objekt $a \in \underline{E}_{n+1}$ zugeordnete Mono m mit dem Index a versehen (und das Unterobjekt im allg. mit dem entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet): $\phi_n^*(a) = A \xrightarrow{m} P^n U$. Für $A \xrightarrow{m} \underline{E}_n \cong A' \xrightarrow{m'} \underline{E}_n$ in $\text{Sub}(\underline{E}_n)$ (d.h. es gibt einen Isomorphismus $A \xrightarrow{i} A'$ in $\underline{E}$ mit $m'i = m$ und $mi^{-1} = m'$) sei kurz $m \cong m'$ geschrieben.

3.2 Definition. Mit (EXT) ist darüberhinaus durch die Komposition von $\underline{E}(1, r): \underline{E}_0 = \underline{E}(1, U) \xrightarrow{\quad} \underline{E}(1, PU) = \underline{E}_1$ mit ϕ_0^* ein Operator $\phi^*: \underline{E}(1, U) \longrightarrow \text{Sub}(U)$ definiert. Für $a \in \underline{E}_0$ sei $\phi^*(a) = \phi_0^*(ra)$ stets mit $A \xrightarrow{m} ra \rightarrow U$ bezeichnet.

3.3 Lemma. Für jedes $a \in \underline{E}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) gibt es einen Isomorphismus $A \xrightarrow{i_a} A'$, so daß dieses Diagramm kommutiert, d.h. $m_{r_{n+1}a} \cong r_n m_a$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_a} & A' \\ m_a \downarrow & & \downarrow m_{r_{n+1}a} \\ P^n U & \xrightarrow{r_n} & P^{n+1} U \end{array}$$

Beweis. Mit 0.7 für $f = r_n$ eine einfache Konsequenz der

induktiven Definition 1.0 der r_n .

3.4 Lemma.

Dieses Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ PA \times A & \xrightarrow{\exists m_a \times m_r}_{n+1} \xrightarrow{a^i_a} & P^{n+1}U \times P^{n+1}U \xrightarrow{\bar{r}_{n+1}} \Omega \end{array}$$

Beweis. Folgt wegen 1.3 und 3.3 aus 0.8 für $f = m_a$.

3.5 Satz. Für kein $1 \xrightarrow{a} U$ ist $A \xrightarrow{m} r_a \rightarrow U$ epimorph.

Beweis. Ist m_{ra} für ein $a \in E_0$ epi, so auch iso. Folglich gilt $U \xrightarrow{\bar{r}_a} \Omega = U \xrightarrow{\text{true}} \Omega$, d.h. $1 \xrightarrow{ra} PU = 1 \xrightarrow{1_U} PU$. Wegen $PU \xrightarrow{PU} PU \leq PU \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{1_U} PU$ würde daher folgen $PU \xrightarrow{(ra!, PU)} PU \times PU \xrightarrow{\exists 1} \Omega = PU \xrightarrow{\text{true}} PU \rightarrow \Omega$. Nach 1.10 hätte man somit eine Faktorisierung $PU \xrightarrow{PU} PU = PU \xrightarrow{\quad} U \xrightarrow{r} PU$. Damit wäre r aber im Widerspruch zu 1.2 epi.

3.6 Lemma. Für jedes $a \in E_{n+1}$

hat man das nebenstehende Pullback,

d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$\phi_{n+1}^*(P_{n+1}a) \cong PA \xrightarrow{\exists m_a} P^{n+1}U$.

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow \exists m_a & & \downarrow \text{true} \\ P^{n+1}U & \xrightarrow{\overline{P_{n+1}a}} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Anwendung von 0.10 für $A \xrightarrow{f} B = A \xrightarrow{m_a} P^nU$.

Unter der Voraussetzung (POT) läßt sich 3.6 für $n = 0$ zerlegen:

3.7 Satz. Für jedes $1 \xrightarrow{a} U$

hat man das obere Pullback, d.h. es

gilt $\phi^*(pa) \cong PA \xrightarrow{m_{rpa}} \xrightarrow{(i'_a)^{-1}} U$

für $\phi^*(a) = A \xrightarrow{m} r_a \rightarrow U$, wobei

$A' \xrightarrow{1'_a} PA$ ein Iso ist, der das

untere Diagramm kommutativ macht;

d.h. man hat $r m_{rpa} \cong \exists m_{ra}$.

$$\begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ U & \xrightarrow{\overline{rpa}} & \Omega \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{m_{rpa}} & U \\ \downarrow i'_a & & \downarrow r \\ PA & \xrightarrow{\exists m_{ra}} & PU \end{array}$$

Beweis. Folgt mit 0.7 für r wegen $\overline{P_1ra} = \exists r(rpa!, PU)$ (POT!).

Diagramm ist ein Pullback,
d.h. für jedes $a \in \underline{E}_0$ ist
 $\bar{r}$ lokal die Relation ϵ_A .

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ PA \times A & \xrightarrow{m_{rpa} i_a^{-1} \times m_{ra}} & U \times U \xrightarrow{\bar{r}} \Omega \end{array}$$

Beweis. Folgt mit 1.4 ($n = 1$), 3.3 ($n = 0$) und 3.7 aus 3.4.

3.9 Bemerkung. Aus diesem Grund sei von jetzt an $\bar{r}$ mit
 $U \times U \xrightarrow{\exists} \Omega$ (allgemein $\bar{r}_n$ mit $P^n U \times P^n U \xrightarrow{\exists_n} \Omega$) bezeichnet.

Der lokalen Beschreibung der Inklusionsrelationen $\supset_n$ (1.7)
dient folgende

3.10 Bemerkung. Für $a, b \in \underline{E}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) hat man
 $a \geq b$, d.h. $1 \xrightarrow{(a,b)} P^n U \times P^n U \xrightarrow{\supset_n} \Omega = 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ genau
dann, wenn ein mit den Inklusionen verträglicher Monomorphismus
 $B \xrightarrow{f} A$ existiert: $B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{m_a} P^n U = B \xrightarrow{m_b} P^n U$.
Für $a, b \in \underline{E}_0$ gilt entsprechend $1 \xrightarrow{(a,b)} U \times U \xrightarrow{\supset} \Omega =$
 $= 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ genau dann, wenn es einen Mono $B \longrightarrow A$ mit
 $B \longrightarrow A \xrightarrow{m_{ra}} U = B \xrightarrow{m_{rb}} U$ gibt.

Die $\underline{E}_n$ sind in einem schwachen Sinn gegen die Bildung von
Unterobjekten abgeschlossen. Präzisiert wird das durch den

3.11 Satz. Sei $a \in \underline{E}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Dann enthält $\underline{E}_n$ zu
jedem Mono $B \xrightarrow{f} A$ ein b' derart, daß $B' \cong B$ gilt.
Beweis. Sei $1 \xrightarrow{\bar{B}} PA$ der transponierte von $A \xrightarrow{\text{ch}(f)} \Omega$.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $1 \xrightarrow{b'} P^n U = 1 \xrightarrow{\bar{B}} PA \xrightarrow{\exists m_a} P^n U$. Mit 0.7
für $A \xrightarrow{m_a} P^{n-1} U$ bestätigt man leicht, daß $\text{ch}(m_a f) =$
 $= \exists m_a (\bar{B}!, P^n U) = \bar{b}'$, d.h. $B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{m_a} P^n U \cong B' \xrightarrow{m_{b'}} P^n U$
gilt. (Für $n = 0$ analog mit ra statt a vermöge 3.7.)

3.12 Korollar. Ist $a \in \underline{E}_0$ ($\phi^*(a) = A \xrightarrow{m_a} U$) und
 $A \xrightarrow{f} B$ ein Morphismus in $\underline{E}$, so gibt es ein zum Bild von f

isomorphes $b' \in \underline{E}_0$, d.h. $\phi(b') \cong \text{im}(f)$ in $\underline{E}$.

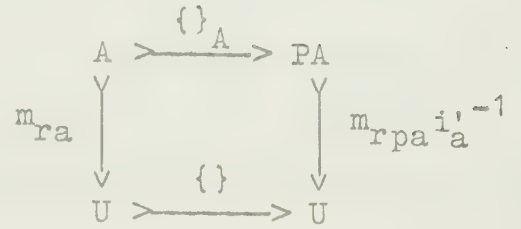
Beweis. Folgt vermöge 0.82 und 3.7 aus 3.11.

3.13 Lemma. Dieses Diagramm

kommutiert für jedes $a \in \underline{E}_0$.

Beweis. Folgt wegen 1.11 und 3.7

aus 0.17 für $f = m_{ra}$.



3.14 Satz. Für jedes $a \in \underline{E}_n$

($n \in \mathbb{N}$) ist mit $\{a\}_{P^n U} = \{\}_{P^n U} a$

das nebenstehende Diagramm ein

Pullback (analog für $a \in \underline{E}_0$ mit

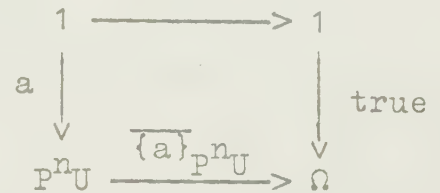
$\{ra\}_U = \{a\}$), d.h. intuitiv gilt stets $1 \cong \{a\}_{P^n U} \longrightarrow P^n U$.

Beweis. Man bestätigt leicht $\text{Eq}(a!, P^n U) = 1 \xrightarrow{a} P^n U$,

folglich ist das Diagramm $1 \xrightarrow{a} P^n U \xrightarrow{(a!, P^n U)} P^n U \times P^n U =$

$= 1 \xrightarrow{a} P^n U \xrightarrow{d_{P^n U}} P^n U \times P^n U$ ein Pullback. Wegen $\overline{\{a\}}_{P^n U} =$

$=_{P^n U} (a!, P^n U)$ folgt die Behauptung.



3.15 Korollar. Für je zwei Objekte $a \in \underline{E}_n$ und $b \in \underline{E}_{n+1}$

gilt $1 \xrightarrow{(\{a\}_{P^n U}, b)} P^{n+1} U \times P^{n+1} U \xrightarrow{\exists_{n+1}} \Omega = 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$

genau dann, wenn $b = r_n a$;

bzw. für $a, b \in \underline{E}_0$: $1 \xrightarrow{(\{a\}, b)} U \times U \xrightarrow{\exists} \Omega = 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$

genau dann, wenn $b = a$.

Beweis. Folgt mit 0.17 für $f = r_n$ aus 3.14.

3.16 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

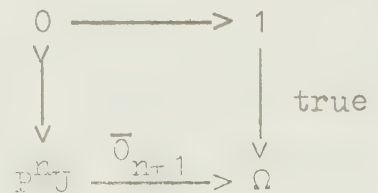
ist dieses Diagramm ein Pullback,

d.h. $\phi_n^*(0_{n+1}) \cong 0 \longrightarrow P^n U$.

Mit (ND) gilt $\phi^*(0) \cong 0 \longrightarrow U$.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\bar{0}_{n+1} = \text{false}_{P^n U}$ (s. 0.18 und

1.12); $\phi^*(0) = \phi_0^*(r_0) = \phi_0^*(0_1)$.



3.17 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist dieses Diagramm ein Pullback, d.h. $\phi_n^*(1_{n+1}) \cong 1 \xrightarrow{c_n} P^n U$, speziell $\phi^*(1) \cong 1 \xrightarrow{c} U$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ O_n \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P^n U & \xrightarrow{1_{n+1}} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Die Behauptung folgt wegen $1_{n+1} = P_n O_n = \{O_n\}_{P^n U}$ (s. 1.13 und 0.20) aus 3.14 und wegen $\phi^*(1) = \phi_0^*(r1) = \phi_0^*(1_1)$.

3.18 Satz. Das nebenstehende Diagramm ist ein Pullback, d.h. $\phi^*(p1) \cong \Omega \xrightarrow{\quad} U$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ U & \xrightarrow{rp1} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Folgt mit $P1 \cong \Omega$ aus 3.7.

3.19 Lemma. Für $a, b \in \underline{E}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) ist dieses Diagramm stets ein Pullback, wobei j_{n+1} der

$$\begin{array}{ccc} A+B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ m_a+m_b \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P^n U + P^n U & \xrightarrow{j_{n+1}(a,b)} & \Omega \end{array}$$

in 1.17 definierte Isomorphismus $P^{n+1} U \times P^{n+1} U \cong P(P^n U + P^n U)$ ist.

Beweis. Für das Unterobjekt $A+B \xrightarrow{m_a+m_b} P^n U + P^n U$ hat man $1 \xrightarrow{A+B} P(P^n U + P^n U) \xrightarrow{Pq_0} P^{n+1} U = 1 \xrightarrow{a} P^{n+1} U$ (entsprechend $Pq_1 \overline{A+B} = b$), damit nach 0.24 $j_{n+1}(a,b) = \overline{A+B}$, d.h.

$j_{n+1}(a,b) = \overline{A+B}$ mit $j_{n+1}(a,b) = \overline{A+B}$. Die Behauptung folgt daraus wegen 0.23.

3.20 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \underline{E}_{n+1}$ ist mit (PA) dieses Diagramm ein Pullback, d.h. $\phi^*(s_{n+1}(a,b)) \cong A+B \xrightarrow{s_n m_n(m_a+m_b)} P^n U$; für $a, b \in \underline{E}$ demzufolge $\phi^*(s(a,b)) \cong s_{m_0}(m_{ra}+m_{rb})$.

$$\begin{array}{ccc} A+B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ m_a+m_b \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P^n U + P^n U & & \\ m_n \downarrow & & \\ P^n U \times P^n U & & \\ s_n \downarrow & & \downarrow \\ P^n U & \xrightarrow{s_{n+1}(a,b)} & \Omega \end{array}$$

(Dabei ist m_n der in 1.16 definierte Monomorphismus.) Die s_n (s. 1.20) spielen also nicht nur die Rolle von geordneten Paaren, sondern sind darüberhinaus interne Summenoperatoren.

Beweis. Die induktive Definition $s_{n+1} = \exists s_n \exists m_n j_{n+1}$ liefert $\overline{s_{n+1}(a,b)} = \overline{s_{n+1}((a,b)!, P^n U)} = \text{ev}_{P^n U}(\exists s_n \exists m_n j_{n+1}(a,b)!, P^n U) = \overline{\exists (s_n m_n)(j_{n+1}(a,b)!, P^n U)}$. Unter Benutzung von 0.7 für $f = s_n m_n$ und 3.19 ergibt sich daraus die Behauptung.

Vollständig analog hat man den entsprechenden Sachverhalt für Produkte:

3.21 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \underline{E}_{n+1}$ ist dieses Diagramm ein Pullback, wobei $k_{P^n U}$ der in 0.26

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ m_a \times m_b \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P^n U \times P^n U & \xrightarrow{\overline{k_{P^n U}(a,b)}} & \Omega \end{array}$$

definierte Operator $P^{n+1} U \times P^{n+1} U \longrightarrow P(P^n U \times P^n U)$ ist.

Beweis. Für den Monomorphismus $A \times B \xrightarrow{m_a \times m_b} P^n U \times P^n U$ gilt $1 \xrightarrow{(a,b)} P^{n+1} U \times P^{n+1} U \xrightarrow{k_{P^n U}} P(P^n U \times P^n U) = 1 \xrightarrow{A \times B} P(P^n U \times P^n U)$, was sich (wie im Beweis von 0.77) mit Hilfe von 0.71 aus 0.9 und der Definition 0.26 ergibt.

3.22 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \underline{E}_{n+1}$ ist das nebenstehende Diagramm ein Pullback, d.h. es gilt $\phi_n^*(q_{n+1}(a,b)) \cong \overline{A \times B \xrightarrow{s_n(m_a \times m_b)} P^n U \times P^n U}$.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ m_a \times m_b \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P^n U \times P^n U & & \\ s_n \downarrow & & \\ P^n U & \xrightarrow{\overline{q_{n+1}(a,b)}} & \Omega \end{array}$$

Mit (PROD) gilt für $a, b \in \underline{E}_0$ entsprechend $\phi^*(q(a,b)) \cong \overline{A \times B \xrightarrow{s(m_a \times m_b)} U}$.

Beweis. Folgt mit 0.7 für $f = s_n$ wegen $q_{n+1} = \exists s_n k_{P^n U}$ (1.21) aus 3.21; sowie wegen (PROD) aus dem obigen Resultat für $n = 0$.

Da für $n \in \mathbb{N}$ die $P^n U$ nicht gegen Potenzen abgeschlossen sind, hat man in diesem Fall nur folgendes

3.23 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und je zwei Objekte $a, b \in \underline{E}_{n+1}$ ist dieses Diagramm ein Pullback, d.h. $\phi_{n+1}^*(e_{n+1}(a,b))$ ist isomorph zu $B^A \xrightarrow{\quad} P^{n+1}U$.

$$\begin{array}{ccc} B^A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ P(A \times B) & & \\ \downarrow \exists s_n \exists (m_a \times m_b) & & \\ P^{n+1}U & \xrightarrow{e_{n+1}(a,b)} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Nach Definition 1.23 ist $e_{n+1}(a,b)$ Durchschnitt von $\gamma \xrightarrow{f_{n+1} \exists m_a \exists m_b} P^{n+1}U$ und $1 \xrightarrow{\exists^2 s_n Pf_{n+1}\{a\}} P^{n+1}U \xrightarrow{a} P^{n+2}U$. Der erste dieser beiden Morphismen liefert mit 3.22 und 3.6 den Mono $P(A \times B) \xrightarrow{\exists m_a \exists m_b} P(P^n U \times P^n U) \xrightarrow{\exists s_n} P^{n+1}U$, der zweite wegen $Pf_{n+1}\{a\}_{P^{n+1}U} = \text{eq}_{P^{n+1}U}(a!, f_{n+1})$ (s. Beweis von 2.20) den Mono $\text{Eq}(a!, f_{n+1}) \xrightarrow{\quad} P(P^n U \times P^n U) \xrightarrow{\exists s_n} P^{n+1}U$. Nun ist offenbar der Egalisator $\text{Eq}(a!, f_{n+1}) \xrightarrow{\quad} P(P^n U \times P^n U)$ gleich dem Pullback von $1 \xrightarrow{a} P^{n+1}U$ längs $P(P^n U \times P^n U) \xrightarrow{f_{n+1}} P^{n+1}U$. Die Behauptung ergibt sich daher aus folgendem

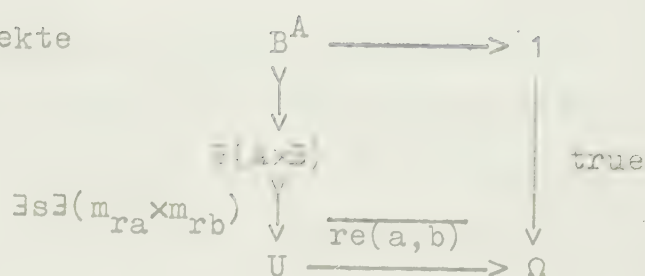
3.24 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \underline{E}_{n+1}$ hat man das Pullback

$$\begin{array}{ccc} B^A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow a \\ P(A \times P) & \xrightarrow{\exists (m_a \times m_b)} & P(P^n U \times P^n U) \xrightarrow{f_{n+1}} P^{n+1}U \end{array}$$

Beweis. Nach 0.33 gilt $P(A \times B) \xrightarrow{f_{n+1} \exists (m_a \times m_b)} P^{n+1}U = P(A \times B) \xrightarrow{f_{AB}} PA \xrightarrow{\exists m_a} P^{n+1}U$. Aus 0.29 folgt wegen der Monomorphie von $\exists m_a$, dass das Diagramm $1 \xrightarrow{1} PA \xrightarrow{\exists m_a} P^{n+1}U = 1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{a} P^{n+1}U$ ein Pullback ist. Komposition mit 0.32 liefert die Behauptung.

Die Abgeschlossenheit von U gegen Exponenten liefert jedoch

3.25 Satz. Für je zwei Objekte
 $a, b \in \underline{E}_0$ ist dieses Diagramm
ein Pullback, d.h. es
gilt $\phi^*(e(a,b)) \cong$
 $\cong B^A \rightrightarrows P(A \times B) \rightrightarrows U$.



Beweis. Nach 3.23 für $n = 0$ ist $B^A \rightrightarrows PU \xrightarrow{e_1(r_a, r_b)} \Omega =$
 $= B^A \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ ein Pullback. Nun gelten die Gleichungen
 $e_1(r_a, r_b) = r_1 re(a,b)$, $P_1 q_1(r_a, r_b) = r_1 r p q(a,b)$ (nach 1.24
bzw. (PROD) und (POT)) und die Isomorphie $m_{r_1 r p q(a,b)} \cong$
 $\cong r m_{r p q(a,b)}$ (nach 3.3 für $n = 0$); insgesamt folgt daher
 $B^A \rightrightarrows P(A \times B) \xrightarrow{\exists s \exists (m_{ra} \times m_{rb})} PU = B^A \rightrightarrows U \xrightarrow{r} PU$. Wegen
 $r_1 = \exists r$ ergibt sich daraus die Behauptung.

3.26 Definition. Seien $(A, \text{dom}_A, \text{cod}_A, \text{id}_A, \text{comp}_A)$ und
 $(B, \text{dom}_B, \text{cod}_B, \text{id}_B, \text{comp}_B)$ interne Kategorien in $\underline{E}$ (s. 2.0).
Dann heißt ein Paar von Morphismen $A \xrightarrow{f} B$ und $A' \xrightarrow{f'} B'$
interner Funktor (von A nach B), wenn folgendes gilt:

- i) $\text{dom}_B f' = f \text{dom}_A$ und $\text{cod}_B f' = f \text{cod}_A$,
- ii) $f' \text{id}_A = \text{id}_B f$,
- iii) und $\text{comp}_B f'' = f' \text{comp}_A$ für den induzierten $A'' \xrightarrow{f''} B''$.

3.27 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das Paar $E_n \xrightarrow{r_n} E_{n+1}$,
 $E'_n \xrightarrow{r'_n} E'_{n+1}$ ein interner Funktor.

Beweis. Gilt wegen 2.8, 2.16 und 2.24.

Zur näheren Untersuchung der Struktur der Kategorien $\underline{E}_n$ (2.27)
sei zunächst folgende Bemerkung gemacht:

3.28 Lemma. Seien a, b Objekte aus $\underline{E}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit
 $\phi_{n-1}^*(a) = A \xrightarrow{m} a \rightarrow E_{n-1}$, $\phi_{n-1}^*(b) = B \xrightarrow{m} b \rightarrow E_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$
bzw. $\phi^*(a) = A \xrightarrow{ra} a \rightarrow U$, $\phi^*(b) = B \xrightarrow{rb} b \rightarrow U$ für $n = 0$.

Sei weiterhin $E_n(a,b)$ durch das nebenstehende Pullback erklärt. Dann gibt es (in der Sprache von $\underline{E}$) eine bijektive

$$\begin{array}{ccc} E_n(a,b) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow (a,b) \\ E'_n & \xrightarrow{(\text{dom}_n, \text{cod}_n)} & E_n \times E_n \end{array}$$

Korrespondenz zwischen $E_n(a,b) = \underline{E}(1, E_n(a,b))$ und $\underline{E}(A,B)$.

Beweis. Für einen Morphismus $1 \xrightarrow{f} E_n(a,b)$, d.h. ein $f \in E'_n$

mit $\text{dom}_n f = a$ und $\text{cod}_n f = b$ gilt nach 2.4 $\bar{e}_n(a,b, \text{rel}_n f) =$

$= \text{ev}_{P^{\text{NU}}}(e_n(a,b), \text{rel}_n f) = \overline{e}_n(a,b) \text{rel}_n f = \text{true}$. Nach 3.23 bzw.

3.25 hat man daher eine eindeutig bestimmte Faktorisierung

$1 \xrightarrow{f} E'_n \xrightarrow{\text{rel}_n} E_n = 1 \dashrightarrow B^A \twoheadrightarrow E_n$, somit per Transposition einen Morphismus $A \xrightarrow{\bar{F}} B$ in $\underline{E}$.

Umgekehrt liefert jedes $F \in \underline{E}(A,B)$ ein $1 \xrightarrow{\bar{F}} B^A \twoheadrightarrow E_n$ mit

$\bar{e}_n(a,b, \bar{F}) = \text{true}$, folglich ein eindeutig bestimmtes $1 \xrightarrow{f} E'_n$

mit $\text{dom}_n f = a$, $\text{cod}_n f = b$ und $\text{rel}_n f = \bar{F}$, d.h. $f \in E_n(a,b)$.

Man sieht leicht, daß diese Zuordnungen zueinander invers sind.

3.29 Lemma. Dieses

Diagramm ist für jedes

$n \in \mathbb{N}_0$ ein Pullback.

$$\begin{array}{ccc} E'_n & \xrightarrow{(\text{dom}_n, \text{cod}_n)} & E_n \times E_n \\ r'_n \downarrow & & \downarrow r_n \times r_n \\ E'_{n+1} & \xrightarrow{(\text{dom}_{n+1}, \text{cod}_{n+1})} & E_{n+1} \times E_{n+1} \end{array}$$

Beweis. Für $X \xrightarrow{h} E'_{n+1}$

erhält man wegen $\text{rel}_{n+1} \leq q_{n+1}(\text{dom}_{n+1}, \text{cod}_{n+1})$ und 2.8 daraus,

daß $\text{dom}_{n+1} h$ und $\text{cod}_{n+1} h$ über $E_n \xrightarrow{r_n} E_{n+1}$ faktorisieren,

vermöge 1.10 eine Faktorisierung $X \dashrightarrow E'_n \xrightarrow{r'_n} E'_{n+1}$.

3.30 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das Paar

$I_n = \underline{E}(1, r_n): \underline{E}(1, E_n) = \text{Ob} \underline{E}_n \longrightarrow \text{Ob} \underline{E}_{n+1} = \underline{E}(1, E_{n+1})$ und

$I'_n = \underline{E}(1, r'_n): \underline{E}(1, E'_n) = \text{Mor} \underline{E}_n \longrightarrow \text{Mor} \underline{E}_{n+1} = \underline{E}(1, E'_{n+1})$ ein

volltreuer Funktor (kurz: $I_n: \underline{E}_n \longrightarrow \underline{E}_{n+1}$).

Beweis. Die Funktoreigenschaften sind eine leichte Konsequenz des entsprechenden internen Sachverhalts 3.27.

Für $a, b \in \underline{E}_n$ ist $1 \xrightarrow{(a,b)} \underline{E}_n \times \underline{E}_n \xrightarrow{r_n \times r_n} \underline{E}_{n+1} \times \underline{E}_{n+1} =$
 $= 1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{(r_n a, r_n b)} \underline{E}_{n+1} \times \underline{E}_{n+1}$ offensichtlich ein Pullback.

Der Pullbackwürfel mit diesem Diagramm als rechte Seitenfläche, 3.29 als Boden, dem Diagramm 3.28 als hintere und für $n+1$ als vordere Seitenfläche liefert

das nebenstehende Pullback als linke Seitenfläche, wobei der obere Morphismus (als Pullback

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}_n(a,b) & \longrightarrow & \underline{E}_{n+1}(r_n a, r_n b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{E}'_n & \xrightarrow{r'_n} & \underline{E}'_{n+1} \end{array}$$

von $1 \xrightarrow{1} 1$) notwendig iso ist. Folglich ist I'_n volltreu.

3.31 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\Gamma_n: \text{Sub}(\underline{E}_n) \longrightarrow \text{Ob} \underline{E}$ der Vergißoperator, der einem Unterobjekt $A \longrightarrow \underline{E}_n$ das Objekt A aus $\underline{E}$ zuordnet.

3.32 Definition. Seien $\phi_0 = \phi: \underline{E}_0 \longrightarrow \text{Ob} \underline{E}$ die Komposition $\Gamma_0 \phi^*: \underline{E}_0 \longrightarrow \text{Sub}(\underline{E}) \longrightarrow \text{Ob} \underline{E}$ sowie $\phi_n: \underline{E}_n \longrightarrow \text{Ob} \underline{E}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Komposition $\Gamma_{n-1} \phi_{n-1}^*: \underline{E}_n \longrightarrow \text{Sub}(\underline{E}_{n-1}) \longrightarrow \text{Ob} \underline{E}$ (s. 3.1 und 3.2). Weiterhin sei $\phi'_n: \underline{E}'_n \longrightarrow \text{Mor} \underline{E}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die durch 3.28 definierte Zuordnung.

3.33 Theorem. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ hat man mit dem Paar $\phi_n: \underline{E}_n = \text{Ob} \underline{E}_n \longrightarrow \text{Ob} \underline{E}$ und $\phi'_n: \underline{E}'_n = \text{Mor} \underline{E}_n \longrightarrow \text{Mor} \underline{E}$ einen volltreuen Funktor $\phi_n: \underline{E}_n \longrightarrow \underline{E}$, und dieses Diagramm ist bis auf Isomorphie stets kommutativ, d.h. die ϕ_n sind mit den Inklusionsfunktoren verträglich.

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}_n & \xrightarrow{\phi_n} & \underline{E} \\ I_n \downarrow & & \uparrow \\ \underline{E}_{n+1} & \xrightarrow{\phi_{n+1}} & \underline{E} \end{array}$$

Beweis. Nach 3.28 hat man die Verträglichkeit von 3.32 mit den Operationen Quelle und Ziel, d.h. für $f \in \underline{E}'_n$ die Gleichungen $\text{dom}(\phi'_n(f)) = \phi_n(\text{dom}_n f)$ und $\text{cod}(\phi'_n(f)) = \phi_n(\text{cod}_n f)$ sowie die Bijektion $\phi'_n: \underline{E}_n(\text{dom}_n f, \text{cod}_n f) \longrightarrow \underline{E}(\text{dom}(\phi'_n(f)), \text{cod}(\phi'_n(f)))$, d.h. die Volltreueheit von ϕ'_n .

Für $a \in \underline{E}_n$ gilt nach 2.4 und 2.25 $\bar{e}_n(\text{dom}_n, \text{cod}_n, \text{rel}_n) \text{id}_n a =$
 $= \bar{e}_n(a, a, s'_n a) = \text{true} = \overline{e_n(a, a)} s'_n a$, nach 3.28 ist daher $\phi'_n(\text{id}_n a)$
 durch $1 \xrightarrow{s'_n a} P^n U = 1 \dashrightarrow A^A \xrightarrow{\quad} P(A \times A) \xrightarrow{\quad} P^n U$ gegeben.
 Wegen $1 \xrightarrow{a} P^n U = 1 \xrightarrow{1_A} PA \xrightarrow{\quad} P^n U$ (0.29) folgt daraus mit
 der Definition der s'_n (2.10 und 2.11) $1 \dashrightarrow A^A \xrightarrow{\quad} P(A \times A) =$
 $= 1 \xrightarrow{1_A} PA \xrightarrow{\exists d} A \rightarrow P(A \times A)$. Mit Hilfe von 0.83 für $A = B$ und
 von 0.64 ergibt sich aus der letzten Gleichung für den trans-
 ponierten von $1 \dashrightarrow A^A$: $\phi'_n(\text{id}_n a) = \phi_n(a) \xrightarrow{\phi_n(a)} \phi_n(a)$,
 d.h. die Zuordnung (ϕ_n, ϕ'_n) ist mit der Identität verträglich.

Sei nunmehr $h \in \underline{E}(1, \underline{E}_n)$, d.h. $h = (f, g) \in \underline{E}'_n \times \underline{E}'_n$ mit $\text{cod}_n f =$
 $= \text{dom}_n g = b$; sei $a = \text{dom}_n h = \text{dom}_n f$ und $c = \text{cod}_n h = \text{cod}_n g$.
 Dann gilt $\phi'_n(\text{comp}_n h) = \phi_n(a) \xrightarrow{\phi'_n(f)} \phi_n(b) \xrightarrow{\phi'_n(g)} \phi_n(c)$,
 wovon sich der Leser anhand der Definition von $\underline{E}_n \xrightarrow{\text{comp}_n} \underline{E}'_n$
 (2.23) wegen 2.20 unter Benutzung von 0.67, 0.78 und 0.79 für
 $n \in \mathbb{N}$ sowie 2.21 und 2.22 für $n = 0$ in endlicher Rechenzeit
 leicht überzeugen kann, d.h. man hat auch die Verträglichkeit mit
 Kompositionen. - Damit ist die Zuordnung 3.32 funktoriell.

Die Verträglichkeit mit den Inklusionsfunktoren folgt für Objekte
 aus 3.3 und für Morphismen aus 3.30

3.34 Satz. Alle Kategorien $\underline{E}_n$ besitzen ein finales Objekt,
 das von den Funktoren I_n und ϕ_n bewahrt wird.

Beweis. Nach 3.17 hat man $\phi_n(1_n) \cong 1$, damit gibt es zu jedem
 $a \in \underline{E}_n$ genau einen Morphismus $\phi_n(a) \dashrightarrow \phi_n(1_n)$. Weil ϕ'_n
 voll ist (3.33), rührt dieser Morphismus von einem $!_a \in \underline{E}'_n$ mit
 $\text{dom}_n(!_a) = a$ und $\text{cod}_n(!_a) = 1_n$ her; weil ϕ'_n treu ist, ist
 $!_a$ durch diese Eigenschaften auch eindeutig bestimmt.

Nach 1.14 hat man $r_n 1_n = 1_{n+1}$, mit 3.30 folgt daraus $I_n(1_n) \cong$
 $\cong 1_{n+1}$, d.h. die Verträglichkeit mit den Inklusionsfunktoren.

3.35 Bemerkung. Der Beweis von 3.34 kann auch mit Hilfe des Operators $E_n \xrightarrow{!n} E'_n$ (2.28) geführt werden: man hat nach 2.29 und 2.4 $\bar{e}_n(a, 1_n, \text{rel}_n!_n a) = \overline{e_n(a, 1_n)} \text{rel}_n!_n a = \text{true}$, folglich eine Faktorisierung $1 \xrightarrow{\text{rel}_n!_n a} E_n = 1 \dashrightarrow 1^A \longrightarrow P^n U$ und damit die Gleichung $\phi'_n(!_n a) = A \xrightarrow{!A} 1$.

Ohne die vollständige Entwicklung der gesamten internen Theorie, die allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde (s. Schluß des 2. Kapitels), ist es allerdings zweckmäßiger, sich bei derartigen Beweisen auf die vorher angewandte lokale Technik unter Benutzung von 3.30 zu stützen.

3.36 Satz. Alle Kategorien E_n besitzen Produkte, die von den Funktoren I_n und ϕ_n bis auf Isomorphie bewahrt werden.

Beweis. Mit jedem Paar von Objekten $(a, b) \in E_n \times E_n = \underline{E}(1, E_n \times E_n)$ hat man $q_n(a, b) \in E_n$, wobei 3.22 $\phi_n(q_n(a, b)) \cong \phi_n(a) \times \phi_n(b)$ liefert. Die Behauptung folgt aus der Produkteigenschaft in $\underline{E}$ aufgrund der Volltreueheit der ϕ'_n , sowie aus 1.22.

3.37 Satz. Die Kategorien E_n besitzen Egalisatoren, die ebenfalls von den I_n und den ϕ_n bewahrt werden.

Beweis. Für zwei Morphismen $f, g \in E_n(a, b)$ sei $C \longrightarrow \phi_n(a)$ der Egalisator $\text{eq}(\phi'_n(f), \phi'_n(g))$. Vermöge 3.11 gibt es dann ein $c \in E_n$ mit $\phi_n(c) \cong C$, wovon aufgrund der universellen Eigenschaften der Egalisatoren in $\underline{E}$ vermöge der Volltreueheit der ϕ'_n leicht $c \cong \text{eq}(f, g)$ in E_n folgt. Die Verträglichkeit mit den I_n ist wieder eine Konsequenz von 3.33.

Mit denselben Methoden folgt aus 3.16 und 3.20:

3.38 Satz. Der 3.34 und 3.36 entsprechende Sachverhalt gilt auch für initiale Objekte und für Koprodukte.

3.40 Theorem. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Kategorie $\underline{E}_n$ endlich vollständig, und die Funktoren I_n und ϕ_n sind exakt.
Beweis. Folgt aus 3.34, 3.36 und 3.37.

3.41 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $1 \xrightarrow{w} \underline{E}_n$ durch $w_0 = p1$, $w_{n+1} = P_n 1_n$ gegeben.

3.42 Lemma. Ein Morphismus $f \in \text{Mor} \underline{E}_n$ ist genau dann mono, wenn $\phi'_n(f)$ in $\underline{E}$ monomorph ist.

Beweis. Folgt aus der Treueit (3.33) und der Exaktheit (3.40) der Funktoren ϕ_n .

3.43 Theorem. Die Kategorie $\underline{E}_n$ besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen Unterobjektklassifikator, der von den Funktoren I_n und ϕ_n bis auf Isomorphie bewahrt wird.

Beweis. Die Verträglichkeit der w_n mit den I_n , die sich aus 3.41 wegen 1.14 und 1.8 ergibt, liefert mit 3.33 in Verallgemeinerung von 3.18 die Gleichung $\phi_n(w_n) \cong \Omega$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Mit $\text{true}_n \in \underline{E}_n(1_n, w_n)$ als Urbild von $\text{true} \in \underline{E}(1, \Omega)$ unter ϕ'_n folgt die Unterobjektklassifikator-Eigenschaft der $w_n \in \underline{E}_n$ aus (TOP) ii) wegen 3.42 und der Volltreueit der ϕ'_n , die gleichzeitig sichert, daß Pullbacks reflektiert werden.

3.44 Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ kommutiert (bis auf Isomorphie) das nebenstehende Diagramm, wobei $P: \underline{E} \longrightarrow \underline{E}$ der Potenzoperator

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}_n & \xrightarrow{\phi_n} & \underline{E} \\ \underline{E}(1, P_n) \downarrow & & \downarrow P \\ \underline{E}_{n+1} & \xrightarrow{\phi_{n+1}} & \underline{E} \end{array}$$

(TOP) iii) ist. Speziell gilt $\phi \underline{E}(1, p) \cong P\phi: \underline{E}_0 \longrightarrow \underline{E}$.

Die Operatoren $\underline{E}(1, P_n)$ kommutieren mit den Inklusionsfunktoren.

Beweis. Die Kommutativität des Diagramms folgt aus 3.6, der Zusatz aus 3.7, und die Verträglichkeit mit den I_n aus 1.8.

3.45 Satz. Der 3.44 entsprechende Sachverhalt gilt auch für die Exponentialoperatoren $\underline{E}(1, e_n): \underline{E}_n \longrightarrow \underline{E}_{n+1}$.

Beweis. Folgt aus 3.23, 3.25 und 1.25.

3.46 Definition. Seien $\underline{F}$ und $\underline{E}$ Topoi, dann heißt ein Funktor $\phi: \underline{F} \longrightarrow \underline{E}$ logisch, wenn er die gesamte Toposstruktur bewahrt, d.h. wenn folgendes gilt:

- i) ϕ ist exakt,
- ii) ϕ bewahrt den Subobjektklassifikator, d.h.

$$\phi(\tau_{\underline{F}}: \underline{1}_{\underline{F}} \longrightarrow \Omega_{\underline{F}}) = \tau_{\underline{E}}: \underline{1}_{\underline{E}} \longrightarrow \Omega_{\underline{E}}$$

- iii) und ϕ bewahrt Potenzen, d.h. für $A \in \text{Ob} \underline{E}$ gilt

$$\phi(\lambda: A \longrightarrow \Omega_A) = \{\lambda(A)\} \times \{A\} \xrightarrow{\text{ev}} A \longrightarrow \Omega_A.$$

3.47 Bemerkung. In diesem Fall ist ϕ auch koexakt und bewahrt Exponenten, was aus den Konstruktionen nach Kock (0.32, s. [13]) und Mikkelsen hervorgeht (s. 0.2).

3.48 Theorem. Ist $\underline{U}$ ein schwaches Universum (siehe 1.36), dann ist $\underline{E}_0 = \underline{E}(1, \underline{U})$ ein Topos, und man hat einen volltreuen logischen Funktor $\phi: \underline{E}_0 \longrightarrow \underline{E}$ (siehe 3.32).

Beweis. Folgt aus 2.27, 3.33, 3.40, 3.43, 3.44 und 3.45.

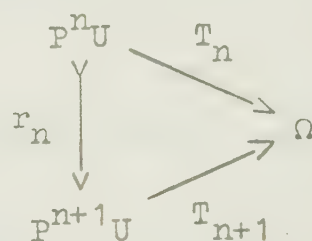
3.49 Bemerkung. Für jedes Paar $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq j$ sei $P^i \underline{U} \xrightarrow{r_j^i} P^j \underline{U}$ durch $r_i^i = P^i \underline{U}$ und $r_j^i = r_{j-1} \dots r_{i+1} r_i$ für $j > i$ gegeben. Dann ist $\{ P^i \underline{U} \xrightarrow{r_j^i} P^j \underline{U} \mid (i, j) \in \mathbb{N}_0^2, i \leq j \}$ eine induktive (d.h. filtrierende) Familie. In jedem Modell der Theorie, das wegen (POT) und (ND) zwangsläufig eine Kopie der natürlichen Zahlen enthält, kann man daher $\underline{E}_\infty$, den Kolimes der $I_j^i = \underline{E}(1, r_j^i): \underline{E}_i \longrightarrow \underline{E}_j$, betrachten. Aus 3.40, 3.43 und 3.44 folgt, daß $\underline{E}_\infty$ ein Topos ist, und daß die ϕ_n einen logischen Funktor $\phi_\infty: \underline{E}_\infty \longrightarrow \underline{E}$ induzieren. $\underline{E}_\infty$ ist dann offenbar das

kleinste Untermodell von $\underline{E}$, das alle Kategorien $\underline{E}_n$ enthält.
 Die Keimfunktoren $I_{\infty}^n: \underline{E}_n \longrightarrow \underline{E}_{\infty}$ bewahren alles, was an Toposstruktur vorhanden ist; insbesondere hat man einen volltreuen logischen Funktor $\underline{E}_0 \longrightarrow \underline{E}_{\infty}$, der darüberhinaus auf Objekten injektiv ist, was aus der Monomorphie der r_j^i folgt.

3.50 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ hat man $P^n U \xrightarrow{T_n} \Omega$ durch $T_n = T_r A$ nach 0.50 für $(A, r) = (P^{n-1} U, r_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$ und $U \xrightarrow{r_0} \Omega = U \xrightarrow{(U, r)} U \times U \xrightarrow{\subseteq} \Omega$ für $n = 0$.

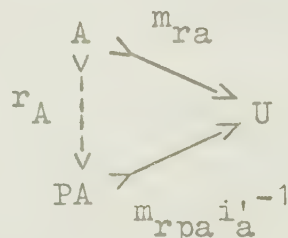
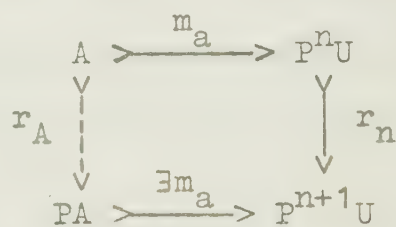
3.51 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist das nebenstehende Diagramm kommutativ.

Beweis. Folgt wegen 1.8 und 1.7 aus der Definition 3.50.



3.52 Definition. Ein Objekt $a \in \underline{E}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) heißt transitiv (in $\underline{E}_n$), wenn $1 \xrightarrow{a} P^n U$ über $T_n \xrightarrow{\quad} P^n U$ faktorisiert, d.h. wenn $T_n a = \text{true}$ gilt.

3.53 Lemma. Ist ein Objekt $a \in \underline{E}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) transitiv, dann gibt es einen Monomorphismus $A \xrightarrow{r_A} P A$ ($A = \phi_{n+1}(a)$), der das obere Diagramm kommutativ ergänzt. Für transitives $a \in \underline{E}_0$ macht r_A das untere Diagramm kommutativ.



Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $T_{n+1} a = \text{true}$ nach 3.50 äquivalent zu $r_{n+1} a = \exists r_n a \leq P_{n+1} a$, was nach 3.10 die Existenz einer Faktorisierung $A' \xrightarrow{m_{r_{n+1} a}} P^{n+1} U = A' \dashrightarrow A'' \xrightarrow{m_{P^{n+1} a}} P^{n+1} U$ liefert. Die Behauptung ergibt sich

daraus mit r_A als Komposition des Isomorphismus $A \xrightarrow{i} a \rightarrow A'$ (3.3) mit $A' \xrightarrow{\quad} A''$ und dem Isomorphismus $A'' \cong PA$ (3.6). Der Zusatz folgt vermöge 3.7 aus der obigen Situation für $n = 0$.

3.54 Bemerkung. Die Transitivität läßt sich äquivalent zu 3.53 durch einen entsprechenden Monomorphismus $UA \xrightarrow{\quad} A$ beschreiben, wobei $UA = \phi_n(U_n a)$ ist (s. 1.30 und 1.31).

3.55 Definition. Ein $A \in \text{Ob } \underline{E}$ heißt transitiv (in $\underline{E}$), wenn es eine extensionale (d.h. monorphe) und rekursive (siehe 1.32) Relation $A \xrightarrow{r} A \rightarrow PA$ gibt.

3.56 Satz. Mit (FUND) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: wenn ein Objekt $a \in \underline{E}_n$ transitiv ist, dann auch $\phi_n(a)$ in $\underline{E}$, d.h. alle Funktoren ϕ_n bewahren die Transitivität.

Beweis. Nach 3.53 hat man eine Inklusion $(A, r_A) \xrightarrow{m} a \rightarrow (P^n U, r_n)$ (speziell $(A, r_A) \xrightarrow{m} r a \rightarrow (U, r)$ für $n = 0$); die Behauptung folgt damit aus 1.35 und 1.33.

3.57 Lemma. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $P^n U \xrightarrow{t_n} P^n U \xrightarrow{T_n} \Omega = P^n U \xrightarrow{\text{true}_n} P^n U \rightarrow \Omega$, wobei t_n und T_n die Operatoren 1.26 und 3.50 sind. Insbesondere ist für jedes $a \in \underline{E}_n$ das Objekt $t_n a$ transitiv in $\underline{E}_n$ (was zusammen mit der aus 0.85 folgenden Minimalitätseigenschaft den Namen des Operators t_n rechtfertigt). Mit (TRH) gilt das gleiche auch für $n = 0$.

Beweis. Folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus 0.94 und für $n = 0$ aus (TRH) und 3.51 für $n = 0$.

3.58 Definition. Osius nennt in [37] ein Objekt A in einem Topos $\underline{E}$ partiell transitiv, wenn es einen Mono $A \xrightarrow{m} B$ in ein transitives Objekt B gibt.

3.59 Satz. Ist U ein fundiertes, transitiv abgeschlossenes schwaches Universum (s. 1.36), dann ist jedes Objekt in dem Topos $\underline{E}_0 = \underline{E}(1, U)$ partiell transitiv, d.h. in $\underline{E}_0$ gilt das Axiom 8.20 (APT) aus [37].

Beweis. Für jedes $a \in \underline{E}_0$ gibt es wegen 0.95 und 3.10 mit $A = \phi(a)$ einen Mono $A \longrightarrow \phi(ta)$. Nach 3.57 ist $ta \in \underline{E}_0$ transitiv, nach 3.56 ist daher auch $\phi(ta)$ in $\underline{E}$ transitiv.

3.60 Bemerkung. Auch dieser Sachverhalt läßt sich intern ausdrücken: man kann zeigen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der vermöge $E_n \xrightarrow{(E_n, t_n, s'_n)} E_n \times E_n \times E_n \xrightarrow{\bar{e}_n} \Omega = E_n \xrightarrow{\text{true}} E_n \rightarrow \Omega$ definierte Morphismus $E_n \longrightarrow E'_n$ über das in geeigneter Weise konstruierte Unterobjekt $\text{Mono}_n \longrightarrow E'_n$ faktorisiert. Jedem globalen Schnitt $1 \xrightarrow{a} E_n$ ordnet dieser Operator dann einen Mono $a \longrightarrow b$ zu, wobei b die transitive Hülle von a ist.

3.61 Bemerkung. In $\underline{E}_\infty$ (siehe 3.49) kann man wegen 3.51 den Begriff der Transitivität einführen und wegen 1.27 einen Operator $\underline{E}_\infty \xrightarrow{L} \underline{E}_\infty$ definieren, der jedem Objekt seine transitive Hülle zuordnet, d.h. (APT) (s. 3.59) gilt in $\underline{E}_\infty$. Offensichtlich bewahren $I_\infty^0: \underline{E}_0 \longrightarrow \underline{E}_\infty$ und $\phi_\infty: \underline{E}_\infty \longrightarrow \underline{E}$ transitive Hüllen.

4. Ersetzung im Universum

Sei (U, r) ein schwaches Universum.

4.0 Definition. Durch das nebenstehende Pullback ist das Objekt $F_1 U$ der partiellen Morphismen von U nach U

$$\begin{array}{ccc} F_1 U & \xrightarrow{vb_1} & PU \\ g_1 \downarrow & & \downarrow d_{PU} \\ P(U \times U) & \xrightarrow{(\exists p_0, f_1)} & PU \times PU \end{array}$$

gegeben, wobei p_0 die erste Projektion auf U , f_1 der Operator 1.23 (0.31) und d_{PU} die Diagonale ist.

4.1 Vermutung. Es gilt $F_1 U \cong \tilde{U}^U$.

4.2 Lemma. Mit $nb_1 = \exists p_1 g_1$ ist das nebenstehende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} F_1 U & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ (vb_1, nb_1, g_1) \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ PU \times PU \times P(U \times U) & \xrightarrow{e_1^*} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen ist

$\neg_{U \times U}(k_U \times P(U \times U))(vb_1, nb_1, g_1) = \neg_{U \times U}(k_U(\exists p_0, \exists p_1)g_1, g_1) = \text{true}_{F_1 U}$
sowie $=_{PU}(p'_0 \times f_1)(vb_1, nb_1, g_1) = \text{true}_{F_1 U}$, was aus $k_U(\exists p_0, \exists p_1) \geq \underline{\geq} P(U \times U)$ (0.71) folgt bzw. wegen 4.0 gilt: $\exists p_0 g_1 = f_1 g_1 = vb_1$.

4.3 Korollar. Es gibt einen Koretrakt $F_1 U \xrightarrow{u_1} E'_1$, der das nebenstehende Diagramm kommutativ ergänzt.

$$\begin{array}{ccc} F_1 U & \xrightarrow{u_1} & E'_1 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow (\text{dom}_1, \text{cod}_1, \text{rel}_1) \\ P(U \times U) & \xrightarrow{(\exists p_0, \exists p_1, \exists s)} & PU \times PU \times PU \end{array}$$

Beweis. Man erhält u_1 wegen 4.2 aus 2.2 bis 2.6 für $n = 1$.

Dessen Retrakt $E'_1 \xrightarrow{u_*1} F_1 U$ ist wegen $\exists p_0 \text{rel}_1^* = \text{dom}_1 = f_1 \text{rel}_1^*$ durch 4.0 mit $g_1 u_*1 = \text{rel}_1^*$ und $vb_1 u_*1 = \text{dom}_1$ gegeben.

4.4 Lemma. $P(U \times U) \xrightarrow{\exists s} PU \leq P(U \times U) \xrightarrow{q_1(\exists p_0, \exists p_1)} PU$.

Beweis. $q_1(\exists p_0, \exists p_1) = \exists s k_U(\exists p_0, \exists p_1) \geq \exists s$.

4.5 Definition. Sei FU durch das nebenstehende Pullback definiert (intuitiv: das Objekt der Morphismen von Elementen von U nach U), und

$$\begin{array}{ccc} FU & \xrightarrow{vb} & U \\ r^* \downarrow & & \downarrow r \\ F_1 U & \xrightarrow{vb_1} & PU \end{array}$$

Sei $PU \xrightarrow{g_0} P(U \times U) = FU \xrightarrow{r^*} F_1 U \xrightarrow{g_1} P(U \times U)$ (s. 4.0).

Die geeignete Version des Ersetzungsaxioms für (U, r) ist jetzt

(ERS) Es gibt einen Morphismus

$FU \xrightarrow{nb} U$, der das

nebenstehende Diagramm

kommutativ ergänzt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} FU & \xrightarrow{nb} & U \\ r^* \downarrow & & \downarrow r \\ F_1 U & \xrightarrow{nb_1} & PU \end{array}$$

intuitiv liegt mit dem Vorbereich einer funktionalen

Relation auf U auch der Nachbereich in U .

4.6 Lemma. Gilt (ERS), dann

faktorisiert $FU \xrightarrow{\exists s g_0} PU$

über $U \xrightarrow{r} PU$:

$$\begin{array}{ccc} FU & \xrightarrow{g} & U \\ g_0 \downarrow & & \downarrow r \\ P(U \times U) & \xrightarrow{\exists s} & PU \end{array}$$

Beweis. Nach 4.5 und (ERS) gilt

$$(\exists p_0, \exists p_1) g_0 = (\exists p_0 g_1, \exists p_1 g_1) r^* = (vb_1 r^*, nb_1 r^*) = (r \times r)(vb, nb),$$

woraus wegen 4.4 und (PROD) $\exists s g_0 \leq q_1(\exists p_0, \exists p_1) g_0 = r q(vb, nb)$

folgt. 1.10 liefert dann mit $b = r q(vb, nb)$ die Behauptung.

4.7 Satz. Es gibt einen

Koretrakt $FU \xrightarrow{u} U'$, der

das nebenstehende Diagramm

kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} FU & \xrightarrow{u} & U' \\ & \searrow (vb, nb, g) & \downarrow (dom, cod, rel) \\ & & U \times U \times U \end{array}$$

Beweis. Wegen $(r \times r \times r)(vb, nb, g) = (vb_1, nb_1, \exists s g_1) r^*$ liefern 4.3

und 2.8 die obige Faktorisierung, deren Retrakt $U' \xrightarrow{u_*} FU$

durch den Retrakt u_{*1} (4.3) wegen $r \text{ dom} = \text{dom}_1 r' = vb_1 u_{*1} r'$

vermöge 4.5 mit $r^* u_* = u_{*1} r'$ und $vb u_* = \text{dom}$ gegeben ist.

4.8 Lemma. Es gibt einen Koretrakt i_1 von nb_1 , und mit (ERS) auch einen von nb_0 so, daß das nebenstehende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i_0} & PU \\ r \downarrow & & \downarrow r^* \\ PU & \xrightarrow{i_1} & F_1U \end{array}$$

Beweis. Die Morphismen $U \xrightarrow{i_0} FU = U \xrightarrow{id} U' \xrightarrow{u_*} FU$ und $PU \xrightarrow{i_1} F_1U = PU \xrightarrow{id} E_1' \xrightarrow{u_*} F_1U$ (s. 2.16, 4.3 und 4.7) machen das Diagramm kommutativ. Wegen $rel_1^* id_1 = \exists d_U$, was aus $rel_1 = \exists s rel_1^*$ (2.5) und $rel_1 id_1 = s_1' = \exists s \exists d_U$ (2.15 und 2.10) folgt, hat man $nb_1 i_1 = \exists p_1 g_1 u_* id_1 = \exists p_1 rel_1^* id_1 = \exists p_1 \exists d_U = \exists U = PU$ und daher auch $r nb i_0 = nb_1 i_1 r = r$, d.h. $nb i_0 = U$.

Mit Hilfe des Vereinigungsoperators $PU \xrightarrow{U} PU$ (s. 1.28) hat man als starkes Ersetzungsaxiom

(STE) Es gibt einen Morphismus $FU \longrightarrow U$, der dieses Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} FU & \xrightarrow{\quad} & U \\ r^* \downarrow & & \downarrow r \\ F_1U & \xrightarrow{U_1 nb_1} & PU \end{array}$$

4.9 Satz. (STE) ist äquivalent zu (VER)+(ERS).

Beweis. (STE) liefert durch Komposition mit 4.8 das Axiom (VER), woraus wegen 1.37 dann auch (ERS) folgt. Die Umkehrung hat man mit $PU \xrightarrow{\quad} U = PU \xrightarrow{nb} U \xrightarrow{U} U$.

4.10 Definition. Ein Objekt U mit einer Relation r heißt Universum, wenn (U, r) ein schwaches Universum ist (s. 1.36) und das Axiom (STE) gilt (bzw. nach 4.9 wenn (U, r) ein vereinigungsabgeschlossenes schwaches Universum mit Ersetzung (ERS) ist).

4.11 Lemma. Sei $1 \xrightarrow{\overline{FU}} P^2U$ der transponierte des Unterobjektes $P^2U \xrightarrow{ch(\exists sg_0)} \Omega$ (s. 4.5). Dann gilt die Ungleichung $U \times PU \xrightarrow{r \times PU} PU \times PU \xrightarrow{e_1} P^2U \leq U \times PU \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\overline{FU}} P^2U$.

Beweis. Per Transposition ist $U \times PU \times PU \xrightarrow{\bar{e}_1(r \times PU \times PU)} \Omega \leq$
 $\leq U \times PU \times PU \xrightarrow{p_2} PU \xrightarrow{ch(\exists sg_0)} \Omega$ zu zeigen.

Sei $X \xrightarrow{(a,b,c)} U \times PU \times PU$ mit $\bar{e}_1(r \times PU \times PU)(a,b,c) = \bar{e}_1(ra,b,c) =$
 $= true_X$ gegeben. Vermöge 2.4 hat man dann eine Faktorisierung
 $X \xrightarrow{(a,b,c)} U \times PU \times PU = X \xrightarrow{x} E_1 \xrightarrow{(dom_1, cod_1, rel_1)} PU \times PU \times PU$,
 insbesondere $dom_1 x = ra$ und $rel_1 x = c$. Wegen $dom_1 = vb_1 u_{*1}$
 (4.3) erhält man vermöge 4.5 ein $X \xrightarrow{y} FU$ mit $r^* y = u_{*1} x$
 und $vb y = a$. Wegen $g_1 u_{*1} = rel_1^*$ (4.3) ergibt sich daraus
 $\exists sg_0 y = \exists sg_1 r^* y = \exists sg_1 u_{*1} = \exists s rel_1^* x = rel_1 x = c$ und damit
 $ch(\exists sg_0) p_2(a,b,c) = ch(\exists sg_0) c = true_X$.

4.12 Satz. Ist (U,r) ein Universum,
 dann faktorisiert $U \times PU \xrightarrow{e_1(r \times PU)} P^2 U$
 (s. 1.23) über $PU \xrightarrow{r_1} P^2 U$.

$$\begin{array}{ccc} U \times PU & \xrightarrow{e'} & PU \\ r \times PU \downarrow & & \downarrow r_1 \\ PU \times PU & \xrightarrow{e_1} & P^2 U \end{array}$$

Beweis. Im Universum hat man wegen (ERS)

nach 4.6 das Unterobjekt $U \xrightarrow{ch(g)} \Omega$, für dessen transponier-
 ten $1 \xrightarrow{\bar{g}} PU$ die Gleichung $1 \xrightarrow{\bar{g}} PU \xrightarrow{r_1} P^2 U = 1 \xrightarrow{\overline{FU}} P^2 U$
 (s. 4.11) gilt. Die Behauptung ergibt sich daher wegen 4.12 als
 Anwendung von 1.10 für $n = 2$, $a = e_1(r \times PU)$ und $b = \bar{g}!_{U \times PU}$.

4.13 Satz. Ist (U,r) ein Universum, dann faktorisiert für
 je zwei Objekte $a \in \underline{E}_0$ und
 $b \in \underline{E}_1$ der Mono $B^A \xrightarrow{\quad} PU$
 ($A = \Phi(a)$, $B = \Phi_1(b)$; s. 3.23
 für $n = 0$) über $U \xrightarrow{r} PU$.

$$\begin{array}{ccc} B^A & \xrightarrow{\quad} & U \\ \downarrow & & \downarrow r \\ P(A \times B) & \xrightarrow{\exists s \exists (m_{ra} \times m_b)} & PU \end{array}$$

Beweis. 4.12 liefert $\bar{e}_1(ra,b) = \overline{Er}(e'(a,b)!, PU)$, woraus die
 Behauptung nach 3.23 wegen 0.7 für $f = r$ folgt.

4.14 Korollar. Ist (U,r) ein Universum, dann gibt es für
 jedes $a \in \underline{E}$ einen Mono $U^A \xrightarrow{\quad} U$, wobei $A = \Phi(a)$ ist.

Beweis. 4.13 für $b = 1_U$ und damit $B = U$.

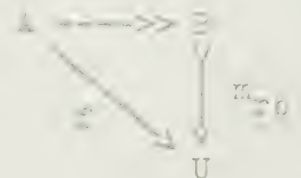
4.15 Definition. Für jedes $a \in \underline{E}_0$ sei mit $A = \phi(a)$ der Bildoperator $U^A \xrightarrow{\text{im}_a} U$ als Komposition des vermöge 4.11 gegebenen Mono $U^A \longrightarrow FU$ mit $FU \xrightarrow{nb} U$ (ERS) definiert.

4.16 Satz. Für jeden Morphismus $f' \in \underline{E}'_1$ mit $\text{dom}_1 f' = ra$ für ein $a \in \underline{E}_0$ und $\text{cod}_1 f' = 1_U$, d.h.

für jedes $A \xrightarrow{1} U$ mit $A = \phi(a)$ hat

man die obbestehende Epi-Mono-Faktorisierung,

wobei $B = \phi(b)$ für $b = \text{im}_a \bar{f}$ ist.



Beweis. Wegen (ERS), $g_0 = g_1 r^*$ (4.5) und $\exists p_1 g_1 = nb_1$ (4.2) hat man $U^A \xrightarrow{r \text{im}_a} PU = U^A \longrightarrow FU \xrightarrow{g_0} P(U \times U) \xrightarrow{\exists p_1} PU$;

wegen $U^A \longrightarrow FU \xrightarrow{\exists s g_0} PU = U^A \longrightarrow P(A \times U) \xrightarrow{\exists s \exists (m_{ra} \times U)} PU$

(s. 4.11) folgt daher $(\exists s \text{ mono}) \quad 1 \xrightarrow{rb} PU = 1 \xrightarrow{r \text{im}_a \bar{f}} PU = 1 \xrightarrow{\bar{f}} U^A \longrightarrow P(A \times U) \xrightarrow{\exists p'_1} PU$ ($A \times U \xrightarrow{p'_1} U$ die zweite Projektion). Die Behauptung ergibt sich damit aus 0.97.

4.17 Bemerkung. Man kann die im vorigen Satz auftretende Zuordnung, die zu jedem $f \in \underline{E}'_1$ mit $\text{dom}_1 f \in \underline{E}_0$ den Epi-Teil $A \longrightarrow B$ liefert, intern durch den Operator $X \xrightarrow{y} FU \xrightarrow{u} U$ repräsentieren, wobei X das Pullback von $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ längs $U \times PU \times PU \xrightarrow{\bar{e}_1 (r \times PU \times PU)} \Omega$ (d.h. das Unterobjekt von $\underline{E}'_1$ der Morphismen mit Quelle in U), y aus dem Beweis von 4.11 und u der Mono 4.7 ist. Es gilt dann $A \longrightarrow B = \phi'(uyf')$ für die Faktorisierung $1 \xrightarrow{f} \underline{E}'_1 = 1 \xrightarrow{f'} X \xrightarrow{x} \underline{E}'_1$

4.18 Bemerkung. 4.16 ist insofern eine Verschärfung von 3.12, als es mit (ERS) im Fall $B = U$ einen kanonischen Monomorphismus $\text{im}(f) \longrightarrow U$ gibt. Analog zu 3.11 hat man mit (ERS) als externe Version von 1.10 für $n = 1$ den folgenden

Satz. Sei a ein Objekt aus $\underline{E}_1$, zu dem es ein b in $\underline{E}_0$ und einen Monomorphismus $A \xrightarrow{f} B$ in $\underline{E}$ ($A = \phi_1(a)$, $B = \phi(b)$) gibt. Dann gilt $a = rc$ für ein $c \in \underline{E}_0$.

Beweis. Nach 3.11 weiß man zunächst, daß es ein $a' \in \underline{E}_0$ mit einem Isomorphismus $\phi(a') \xrightarrow{i} A$ gibt. Nach 4.16 hat man folglich die kanonische Epi-Mono-Zerlegung $\phi(a') \xrightarrow{i} A \xrightarrow{m_a} U = \phi(a') \twoheadrightarrow (c) \xrightarrow{m_{rc}} U$ von m_a über ein $c \in \underline{E}_0$, deren Epi auch mono, und somit iso ist. Daher gilt aber $m_a \cong m_{rc}$ in $\text{Sub}(U)$, folglich $\bar{a} = \text{ch}(m_a) = \text{ch}(m_{rc}) = \bar{rc}$, d.h. $a = rc$.

4.20 Korollar. Ist (U, r) ein Universum, dann liegt jedes $a \in \underline{E}_1$, für das es ein $b \in \underline{E}_0$ mit $\phi_1(a) = A \cong B = \phi(b)$ gibt, bereits in $\underline{E}_0$, d.h. $a = rc$ für ein $c \in \underline{E}_0$.

Beweis. 4.19 mit dem Iso $A \cong B$ für f .

4.21 Definition. Für ein Universum (U, r) kann man vermöge 4.12 den Kleinpotezoperator $PU \times PU \xrightarrow{\tilde{e}} PU$ als Komposition $PU \times PU \xrightarrow{\text{Pr}P_U \times \{ \}} PU \rightarrow PU \times P^2U \xrightarrow{k_{U, PU}} P(U \times PU) \xrightarrow{\exists e'} P^2U \xrightarrow{U_U} PU$ einführen.

4.22 Vermutung. Für $a, b \in \underline{E}_1$ spielt $B^{(A)} = \phi_1(\tilde{e}(a, b))$ die Rolle der Kleinpotezen aus [36].

Für $a \in \underline{E}_1$ ist $U^{(A)}$ durch das nebenstehende Pullback gegeben; insbesondere gilt $U^{(U)} \cong FU$.

$$\begin{array}{ccc} U^{(A)} & \dashrightarrow & PA \\ \downarrow & & \downarrow \exists m_a \\ FU & \xrightarrow{r \text{ vb}} & PU \end{array}$$

4.23 Definition. Für jedes $a \in \underline{E}_1$ sei $U^A \xrightarrow{\Sigma'_1} P(A \times U)$ ($A = \phi(a)$) der transponierte von $U^A \times A \times U \xrightarrow{\text{ev}_{AU \times U}} U \times U \xrightarrow{\exists} \Omega$; und sei $U^A \xrightarrow{\Sigma_1} PU = U^A \xrightarrow{\Sigma'_1} P(A \times U) \xrightarrow{\exists s \exists (m_a \times U)} PU$ als Summenoperator bezeichnet.

4.24 Lemma. Sei $a \in \underline{E}_1$, $A = \Phi(a)$. Für jeden Morphismus $A \xrightarrow{f} U$ ist dann $\Phi_1(\Sigma_{1a} \bar{f}) \xrightarrow{\quad} U$ (bis auf Isomorphie in $\text{Sub}(U)$) durch die Komposition

$$\Sigma f \xrightarrow{j_f} A \times U \xrightarrow{m_a \times U} U \times U \xrightarrow{s} U$$

gegeben, wobei j_f durch das nebenstehende Pullback definiert ist.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma f & \dashrightarrow & 1 \\ \downarrow j_f & & \downarrow \text{true} \\ A \times U & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

Beweis. Mit 0.7 für $f = s_a(m_a \times U)$ einfache Folgerung aus 4.23.

4.25 Satz. Ist (U, r) ein Universum, dann faktorisiert $U^A \xrightarrow{\Sigma_{1ra}} PU$ für $a \in \underline{E}_0$ über $U \xrightarrow{r} PU$.

$$\begin{array}{ccc} U^A & \xrightarrow{\Sigma_a} & U \\ & \searrow \Sigma_{1ra} & \downarrow \text{true} \\ & & PU \end{array}$$

Beweis. Sei $\Sigma'' = \exists(m_{ra} \times U) \Sigma'_{1ra}$. Aus

$$U^A \xrightarrow{\Sigma'_{1ra}} P(A \times U) \xrightarrow{\exists p_0} PA \leq U^A \xrightarrow{\quad} PU \quad \text{folgt wegen}$$

$\exists m_{ra} 1_A = ra$ die Ungleichung $U^A \xrightarrow{\exists p_0 \Sigma''} PU \leq U^A \xrightarrow{ra!} PU$; aus

$$U^A \xrightarrow{\Sigma'_{1ra}} P(A \times U) \xrightarrow{\exists p_1} PU \leq U^A \xrightarrow{\quad} P(A \times U) \xrightarrow{\exists p_1} PU \xrightarrow{U_1} PU$$

($U^A \xrightarrow{\quad} P(A \times U)$ die übliche Einbettung) folgt wegen (VER) und

$rnb = nb_1 r^* = \exists p_1 g_0$ (ERS) nach Definition 4.15 die Ungleichung

$$U^A \xrightarrow{\exists p_1 \Sigma''} PU \leq U^A \xrightarrow{r U \text{im}_a} PU. \text{ Insgesamt gilt } (\exists p_0, \exists p_1) \Sigma'' \leq$$

$$\leq (r \times r)(a!, U \text{im}_a), \text{ folglich wegen 0.71 } \Sigma'' \leq k_U(r \times r)(a!, U \text{im}_a).$$

Wegen $\exists s \Sigma'' = \Sigma_{1ra}$, $\exists s k_U = q_1$ und $q_1(r \times r) = rq$ liefert das

$$\Sigma_{1ra} \leq rq(a!, U \text{im}_a), \text{ woraus die Behauptung nach 1.10 folgt.}$$

4.26 Satz. Sei $\underline{E}$ eine kartesisch abgeschlossene Kategorie.

Dann ist mit $(K, \text{dom}, \text{cod}, \text{id}, \text{comp})$ auch $(K^A, \text{dom}^A, \text{cod}^A, \text{id}^A, \text{comp}^A)$

für jedes $A \in \text{Ob} \underline{E}$ eine interne Kategorie und $K \xrightarrow{K^!} K^A$ (mit der Identifikation $K^1 = K$) ein interner Funktor.

Beweis. Der Funktor $(-)^A: \underline{E} \rightarrow \underline{E}$ bewahrt als adjungierter

Pullbacks. Die Behauptung folgt mit elementarer Diagrammjagd aus den Definitionen 2.0 und 3.26.

4.27 Definition. Sei

$D \xrightarrow{i_d} U' \times U$ durch das
nebenstehende Pullback
definiert. Dann ist als

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow i_d & & \downarrow \text{true} \\ U' \times U & \xrightarrow{\text{dom} \times U} & \Omega \end{array}$$

transponierter von $D \times U \xrightarrow{i_d \times U} U' \times U \times U \xrightarrow{\text{rel} \times s} U \times U \xrightarrow{\exists} \Omega$
ein Morphismus $D \xrightarrow{v} PU$ gegeben, für den mit etwas Diagramm-
jagd mit der Technik aus dem 2. Kapitel gezeigt werden kann, daß
er über $U \xrightarrow{\{\}} U \rightarrow PU$ faktorisiert: es gibt ein $D \xrightarrow{ev} U$ mit
 $\{\}_U ev = v$. (Intuitiv ist D das Objekt aller Paare (f, x) mit
 $x \in \text{dom} f$ und ev der Auswertungsmorphismus.)

Für jedes $1 \xrightarrow{i} U$, $I = \Phi(i)$ hat man nach 4.26 die Kategorie
 $\underline{E}_I = \underline{E}(1, U^I)$. Dann kann der Operator $\Sigma_I = \underline{E}(1, \Sigma_i): \underline{E}_I \longrightarrow \underline{E}_0$
wie folgt zum Funktor fortgesetzt werden: für $1 \xrightarrow{f} (U')^I$ mit
 $\text{dom}^I f = \bar{a}$, d.h. $a = \text{dom } \bar{f}$ hat man

$$\begin{array}{ccc} \Sigma a & \xrightarrow{f^*} & D \\ \downarrow j_a & & \downarrow i_d \\ I \times U & \xrightarrow{\bar{f} \times U} & U' \times U \end{array}$$

wegen 4.24 und 4.27 eine Faktorisierung
wie im nebenstehenden Diagramm. Mit dem

Morphismus $D \xrightarrow{ev} U$ gilt dann

$\Sigma a \xrightarrow{(p_o j_a, ev f^*)} I \times U \xrightarrow{\bar{r} b} \Omega = \Sigma a \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ für $b =$
 $= \text{cod } \bar{f}$. Sei $\Sigma_I^!(f)$ der daraus resultierende Morphismus
 $\Sigma a \longrightarrow \Sigma b$. - Mit dieser Definition wird Σ_I koadjungiert zu
dem Diagonalfunktor $\underline{E}(1, U^!): \underline{E}_0 \longrightarrow \underline{E}_I$.

Die hier skizzenhaft durchgeführte Konstruktion soll nur erläu-
tern, daß es unter Voraussetzung des Ersetzungsaxioms möglich
ist, die Frage der internen Vollständigkeit von U adäquat in
Angriff zu nehmen. Sicherlich ist es in Verallgemeinerung des
obigen möglich, für jedes $1 \xrightarrow{1} U$ einen internen Funktor
 $U^I \xrightarrow{\Sigma} U$ zu konstruieren, der koadjungiert zu $U^!$ ist. Die Ver-
allgemeinerung auf allgemeine Limites dürfte auch möglich sein.

5 . M e n g e n t h e o r e t i s c h e

Sei mit ZF die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre bezeichnet, bestehend aus (s. z.B. [17], [37], [41] oder [47])

- (ZF) 1) dem Extensionalitätsaxiom,
2) dem Paarmengenaxiom,
3) dem Vereinigungsaxiom,
4) dem Potenzmengenaxiom,
5) dem Fundierungsaxiom,
6) den Ersetzungsaxiomen und
7) dem Unendlichkeitsaxiom.

Einige der folgenden Betrachtungen können bereits im Teilsystem Z_0 von ZF durchgeführt werden, das aus den Axiomen (ZF) 1) bis 5), 6') den Axiomen der beschränkten Aussonderung und 7') der Existenz der leeren Menge besteht.

5.0 Definition. Sei $\underline{M}$ der Topos der Mengen in ZF, wobei $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $\Omega = 2 = \{0,1\}$ und $\text{true}(0) = 1$, PA die Potenzmenge von A und die Abbildung ev_A durch $(B,x) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \notin B \end{cases}$ ($B \subset A$, $x \in A$) definiert ist.

5.1 Definition. Eine Menge U heißt Universum (in ZF), wenn $U \subset \text{PA}$ und U die folgenden Bedingungen erfüllt:

- ii) $U \subset \text{PU}$, d.h. U ist transitiv,
- iii) U ist abgeschlossen gegen die Bildung von Vereinigungen,
- iv) U ist abgeschlossen bezüglich der Potenzmengenbildung,

d.h. mit $a \in U$ ist $Pa \in U$,

- v) U ist abgeschlossen gegen Ersetzungen, d.h. für jede Abbildung $f: a \longrightarrow U$ ist mit dem Vorbereich $a \in U$ auch der Nachbereich $\{f(x) | x \in a\} \in U$.

5.2 Bemerkung. In der Literatur fehlt mitunter die Forderung (UN) i). Dafür findet man immer das Axiom der Abgeschlossenheit gegen die Bildung von Paarmengen, was mit i) überflüssig ist: wenn es ein $a \in U$ gibt, gilt wegen iv) $Pa \in U$, somit nach ii) $0 \in U$, folglich $2 = P1 = P^2 0 \in U$. Für $a, b \in U$ gilt dann aber wegen v) $\{a, b\} \in U$; weil es der Nachbereich der Abbildung $2 \xrightarrow{f} U: 0 \mapsto a, 1 \mapsto b$ ist.

Weiterhin sind die Axiome iii) und v) stets zusammengefaßt zu: für jedes $f: a \longrightarrow U$ ist mit $a \in U$ auch $U\{f(x) | x \in a\} \in U$, was offensichtlich zu iii)+v) äquivalent ist (siehe Satz 4.9).

5.3 Definition. Für jede Menge A sei $A \xrightarrow{r} PA$ die Abbildung $x \mapsto x \cap A$ für $x \in A$, d.h. in $\underline{M}$ die transponierte der inversen, auf A eingeschränkten $\in$ -Relation $A \times A \xrightarrow{\exists} A \rightarrow 2$.

5.4 Satz. Ist U eine Menge mit (UN) i), ii) und iv), dann gelten für (U, r_U) in $\underline{M}$ die Axiome (EXT), (POT) und (ND). Gelten darüberhinaus (UN) iii) bzw. v), folgt (VER) bzw. (ERS).

Beweis. (UN) ii), d.h. die Transitivität von U liefert, daß r_U die Inklusionsabbildung, also injektiv ist. Damit gilt (EXT). Analyse der Konstruktion 0.4 in $\underline{M}$ zeigt in Verbindung mit ii), daß $U \xrightarrow{r_U} PU \xrightarrow{P} P^2 U$ die Abbildung $a \mapsto Pa$ ist; wegen iv) hat man daher (POT).

Jedem Element $a \in U$ entspricht (vermöge $0 \mapsto a$) eine Abbildung $1 \longrightarrow U$; aus i) folgt somit (ND).

iii) liefert (VER), weil $PU \xrightarrow{\exists r_U} P^2U \xrightarrow{U} PU$ die Abbildung $A \mapsto UA = U(a|a \in A)$ ist, was wegen 0.4) und $UA \subset B \Leftrightarrow A \subset PB$ für $A \subset PU$, $B \subset U$ aus dem vorherigen folgt.

Durch Analyse der verwendeten Begriffe ist leicht einzusehen, daß FU die Menge der Abbildungen von Elementen aus U nach U ist; folglich impliziert v) das Axiom (ERS).

5.5 Satz. Ist U eine transitive Menge, dann gilt für (U, r_U) das Axiom (FUND).

Beweis. Folgt wegen (ZF) 5) aus [37], Theorem 4.2.

Dem Nachweis des Axioms (PA) dient folgender

5.6 Satz. Die durch $(x', y')R(x, y) \Leftrightarrow (x' \in x \wedge y' = 1) \vee (x' \in y \wedge y' = 0)$ definierte Relation ist extensional, fundiert und vorklein (d.h. für jedes Paar (x, y) ist $\{(x', y') | (x', y')R(x, y)\}$ eine Menge).

Beweis. [30].

Durch Anwendung des Satzes von Mostowski erhält man daher ein

5.7 Definition. "geordnetes Paar" $\langle -, - \rangle$ mit der Eigenschaft $\langle a, b \rangle = \{\langle x, 1 \rangle | x \in a\} \cup \{\langle y, 0 \rangle | y \in b\}$ für je zwei Mengen a und b , wobei $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ genau dann gilt, wenn $a = c$ und $b = d$.

Da jedes Universum U ein inneres Modell von Z_0 mit Ersetzung ist, hat man als Interpretation von R dort die Relation R_U , die mit der Einschränkung von R auf $U \times U$ übereinstimmt. Damit ist U bezüglich $\langle -, - \rangle$ abgeschlossen und man hat den

5.8 Satz. Sei U ein Universum. Dann gilt für $U \times U \xrightarrow{s} U = U \times U \xrightarrow{\langle -, - \rangle} U$ das Axiom (PA).

Beweis. R_U ist gerade die Relation $1_1(r \times r)$ für $r = r_U$; die Behauptung folgt damit unmittelbar aus 5.7.

5.9 Bemerkung. Da in der obigen Konstruktion das Ersetzungsaxiom (ZF) 6) nur in Form des Satzes von Mostowski eingeht, kann man sich auf die Mengenlehre Z beschränken, die aus den Axiomen (Z_0) 1) bis 7'), 8') der Existenz von transitiven Hüllen sowie 9') dem Axiom der transitiven Repräsentanten besteht (siehe [37], 4.4 (TA) und 4.5 (ATR)).

5.10 Satz. Für ein Universum U gilt (PROD).

Beweis. Anhand der Konstruktion 0.26 überlegt man sich leicht, daß k_U die Abbildung $(A,B) \mapsto A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ und damit $q_1(A,B) = s[A \times B] = \{ \langle x,y \rangle \mid x \in A, y \in B \}$ für $A, B \subset U$ ist. Wegen $s[a \times b] = U\{s[\{x\} \times b] \mid x \in a\}$ und $s[\{x\} \times b] \cong b$ für je zwei Mengen $a, b \in U$ und jedes $x \in a$ folgt die Behauptung aus (UN) iii) und v). (Wegen $s[a \times b] \cong a \times b$ ist durch den Operator q natürlich ein kategorielles Produkt gegeben.)

5.11 Satz. Für ein Universum U gilt (TRH).

Beweis. In ZF (auch ohne Unendlichkeitsaxiom) ist jede Menge a Teilmenge der transitiven Menge $\{ b \mid \text{rang}(b) \leq \text{rang}(a) \}$.

Zusammenfassend hat man damit das

5.12 Theorem. Ein Universum U in ZF ist ein fundiertes, transitiv abgeschlossenes Universumsobjekt (U, r_U) im Topos $\underline{M}$.

Beweis. 5.4, 5.5, 5.8, 5.10, 5.11.

Es gilt auch in gewissem Sinne die Umkehrung:

5.13 Theorem. Jedes fundierte Universum(sobjekt) (U, r) im Topos $\underline{M}$ ist isomorph zu einem (eindeutig bestimmten) Universum (V, r_V) in ZF, wobei r durch den Iso in r_V überführt wird.

Beweis. Die Axiome (EXT) und (FUND) liefern nach dem Satz von

Mostowski eine bijektive Abbildung $U \xrightarrow{i} V$ in eine (eindeutig bestimmte) transitive Menge V , wobei $y \in r(x)$ für $x, y \in U$ genau dann gilt, wenn $i(y) \in r_V(i(x)) = i(x)$. Die Implikationen $(ND) \Rightarrow (UN) \text{ i)}$, $(VER) \Rightarrow (UN) \text{ iii)}$, $(POT) \Rightarrow (UN) \text{ iv)}$ und $(ERS) \Rightarrow (UN) \text{ v)}$ für V ergeben sich als einfache Übersetzung der topos-theoretischen Konstruktionen für $\underline{E} = \underline{M}$ wegen $\exists i r = r_V i$.

Als mögliches Axiom in einem Topos $\underline{E}$ hat man

.(SEP) Das finale Objekt 1 ist ein Separator (= Generator).

5.14 Theorem. Sei (U, r) ein transitiv abgeschlossenes fundiertes schwaches Universum in $\underline{E}$. Gilt (SEP) in $\underline{E}$, dann ist der Topos $\underline{E}_0 = \underline{E}(1, U)$ ein elementarer Topos von Z-Mengen im Sinne von [37], 8.21 f.

Beweis. (SEP) vererbt sich wegen der Volltreueheit von ϕ auf den Topos $\underline{E}_0$ (s. 3.48); das Axiom (APT) gilt nach 3.59.

5.15 Definition. Ein Objekt A in $\underline{E}$ heißt U-klein, wenn es ein $a \in \underline{E}_0$ und einen Isomorphismus $A \longrightarrow \phi(a)$ gibt.

5.16 Satz. Ist (U, r) ein schwaches Universum, dann bilden die U-kleinen Objekte einen Zwischentopos $\underline{E}_0 \rightrightarrows \underline{E}_U \rightrightarrows \underline{E}$, d.h. man hat logische volltreue Funktoren $\underline{E}_0 \longrightarrow \underline{E}_U$ und $\underline{E}_U \longrightarrow \underline{E}$.

Beweis. $\underline{E}_U$ ist gerade der Isomorphieabschluß vom "Bild" von ϕ in $\underline{E}$. Die Behauptung folgt damit aus Theorem 3.48.

5.17 Definition. Ein Objekt A in $\underline{E}$ heißt eine U-Menge, wenn A U-klein ist. $A \in \text{Ob} \underline{E}$ heißt eine U-Klasse (bzw. ein U-Konglomerat; U-Kartell; U-Syndikat), wenn es ein $a \in \underline{E}_i$ mit $A \cong \phi_i(a)$ für $i = 1$ (bzw. $i = 2 ; 3 ; 4$) gibt.

5.18 Bemerkung. Ist (U, r) ein Universum in $\underline{E}$ und gilt (SEP), dann bilden die U-Klassen eine Kategorie $\underline{E}_{PU}$ von Klassen und Abbildungen im Sinne von [36] (mit Ausnahme des Unendlichkeitsaxioms).

Beweis. $\underline{E}_{PU}$ ist der Isomorphieabschluß vom Bild von Φ_1 in $\underline{E}$; aufgrund der Ergebnisse des 3. Kapitels und nach 4.12 besitzt $\underline{E}_{PU}$ damit eine Reihe von Abgeschlossenheits-Eigenschaften (ist endlich vollständig, besitzt einen Unterobjektklassifikator und Exponenten mit U-kleinen Potenzen) und enthält $\underline{E}_U$ (s. 5.16) als Untertopos, d.h. man hat einen logischen und volltreuen Funktor $\underline{E}_U \longrightarrow \underline{E}_{PU}$. Die Gültigkeit der einzelnen Axiome aus [36] sind Konsequenzen aus den Axiomen an und Sätzen über das Universum aus dem 1. und 4. Kapitel.

5.19 Bemerkung. Sowohl in 5.14 als auch in 5.18 kann das Unendlichkeitsaxiom hinzugefügt werden: nach 1.39 hat man ein NN -Objekt N in $\underline{E}$ mit einem Mono $N \longrightarrow U$ (s. [8]), d.h. eine U-Klasse N . Sei $1 \xrightarrow{\bar{N}} PU$ der entsprechende globale Schnitt, dann ist die geeignete Version des Unendlichkeitsaxioms

(INF) $1 \xrightarrow{\bar{N}} PU$ faktorisiert
über $U \xrightarrow{r} PU$, d.h. N
ist eine U-Menge (U-klein).

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & U \\ & \searrow & \downarrow r \\ & & PU \end{array}$$

5.20 Bemerkung. Treibt man in $\underline{E}_{PU}$ Kategorientheorie, kann man im Sinne von [10] und [26] (um etwa Funktorkategorien in den Griff zu bekommen) nach dem Muster von 5.17 Gesamtheiten höheren Typs bilden, indem man in die (naheliegender definierten) Kategorien $\underline{E}_{P^i U}$ ($i = 2, 3, 4$) aufsteigt. Grob gesprochen, unterstützt das die Philosophie von MacLane [27].

6.1. Ein Universum

Das System der Axiome 1.36 und 4.10 für ein Universum (U, r) in einem Topos $\underline{E}$ erhebt durchaus keinen Anspruch auf Minimalität. Es bietet sich der Versuch an, die Axiome (PA) und (PROD) aus anderen Axiomen abzuleiten:

- 6.0 Problem. i) $(EXT)+(POT)+(ND)+(FUND)+(ERS) \Rightarrow (PA) ?$
 ii) $(EXT)+(POT)+(ND)+(STE)+(PA) \Rightarrow (PROD) ?$

Für jedes $A \in \text{Ob}\underline{E}$ sei KA das Objekt der Kuratowski-endlichen Unterobjekte nach [12], d.h. das "kleinste" Unterobjekt von PA ,
 $KA = \bigcap \{ B \mid A \rightarrow B \text{ und } B \xrightarrow{!} B \}$ faktorisieren und das bezüglich der Vereinigung $PA \times PA \xrightarrow{V} PA$ abgeschlossen ist.

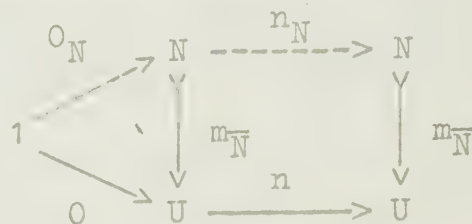
Für ein Universum U in $\underline{M}$ ist KU offensichtlich das Unteruniversum der endlichen Mengen mit endlichem Rang; daher die

6.1 Vermutung. Für ein Universum (U, r) ist KU ein Universum und es gibt einen logischen internen Funktor $KU \longrightarrow U$.
 (KU dürfte als interne Kategorie gerade die Rolle von U_{fin} nach Bénabou/Wraith spielen; s. [46].)

In einem Universum bieten sich eine Reihe von Morphismen als Nachfolger-Operatoren an: man hat den Potenzoperator $U \xrightarrow{p} U$ sowie die interne Version $U \xrightarrow{\sim} U$ des $\sim$ -Operators (die sich mit den Methoden des 1. Kapitels leicht gewinnen läßt). Der (vom Standpunkt der Ordinalzahltheorie aus gesehen) möglicherweise interessanteste Kandidat ist $U \xrightarrow{+} U = U \xrightarrow{(U, 1!)} U \times U \xrightarrow{s} U$.

Für einen (geeigneten) dieser drei Morphismen $U \xrightarrow{n} U$ hat man

6.2 Definition. einen Morphismus $1 \longrightarrow P^2U$ als transponierten von $PU \xrightarrow{(\exists n, PU, PU, 0_U!)} PU \times PU \times PU \times PU \xrightarrow{\wedge(\subseteq_1 \times \exists_1)} \Omega$, der durch Komposition mit dem Durchschnittsoperator $P^2U \xrightarrow{n_U} PU$ einen globalen Schnitt $1 \xrightarrow{\bar{N}} PU$ liefert. Der zugehörige Mono $N \xrightarrow{m_{\bar{N}}} U$ ist dann das "kleinste" $1 \xrightarrow{0} U$ faktorisiert und das bezüglich $U \xrightarrow{n} U$ abgeschlossen ist.



6.3 Vermutung. Für ein schwaches Universum (U, r) ist $1 \xrightarrow{0_N} N \xrightarrow{n_N} N$ ein NNO in $\underline{E}$.

Die im 3. Kapitel entwickelte Methode, globale Schnitte $1 \xrightarrow{a} U$ mit dem Funktor Φ in den Topos $\underline{E}$ "herauszuziehen", läßt sich offensichtlich auf Morphismen von offenen Objekten nach U (d.h. auf Morphismen $1 \xrightarrow{a} \tilde{U}$) verallgemeinern (s. [39]; ein Objekt X heißt offen, wenn $X \xrightarrow{!} X \rightarrow 1$ ein Monomorphismus ist).

Analog zu 3.0 bzw. 3.1 erhält man für jedes $1 \xleftarrow{!} X \xrightarrow{a} U$ einen Monomorphismus $A \xrightarrow{m} ra \rightarrow X \times U$, durch dessen Komposition mit dem Mono $X \times U \xrightarrow{m} X \rightarrow U = X \times U \xrightarrow{! \times U} 1 \times U \xrightarrow{p_1} U$ ein Operator $\tilde{\Phi}^*: \underline{E}(1, \tilde{U}) \longrightarrow \text{Sub}(U)$ definiert ist. Es ist zu erwarten, daß mit $\tilde{\Phi} = \Gamma \tilde{\Phi}^*: \underline{E}(1, \tilde{U}) \longrightarrow \underline{E}$ große Teile der Theorie aus dem 3. Kapitel durchgehen.

6.4 Problem. Welche?

Natürlich ist es möglich, noch weiter zu verallgemeinern, d.h. alle Morphismen $X \xrightarrow{f} U$ zuzulassen und damit einen Funktor $\underline{E}/U \longrightarrow \underline{E}$ zu gewinnen. Inwieweit sich hier allerdings Exaktheitsaussagen übertragen lassen, sei vorläufig dahingestellt.

Für ein Universum (U, r) ist U eine interne Kategorie (2.26). Man kann dann durch entsprechende Gleichungen für jede interne Kategorie A in $\underline{E}$ das Unterobjekt $(A, U) \rightrightarrows U^A$ der internen Funktoren von A nach U definieren. Offensichtlich ist (A, U) eine interne Kategorie und es gibt eine Faktorisierung (s. 4.26) $U \xrightarrow{U^!} U^A = U \xrightarrow{D_A} (A, U) \rightrightarrows U^A$, wobei D_A ein interner Funktor ist.

Eine interne Kategorie A heiße U -klein, wenn das Morphismenobjekt A' (und damit auch A) U -klein ist (s. 5.15).

6.5 Vermutung. Ist A U -klein, dann besitzt $U \xrightarrow{D_A} (A, U)$ einen adjungierten $(A, U) \xrightarrow{\lim_A} U$ und einen koadjungierten $(A, U) \xrightarrow{\text{col}_A} U$ internen Funktor.

Es bietet sich natürlich an, weitere kategorielle Konzepte in diesem Rahmen zu untersuchen:

6.6 Problem. Ist die interne Kategorie der U -wertigen Praegarben (A, U) ein Toposobjekt?

6.7 Problem. Lassen sich alle internen Topoi auf diese Weise gewinnen? Speziell: Welche internen Topoi stammen von einem Universumsobjekt her?

Symbolverzeichnis

Axiom	Seite		
(ERS)	42	$\models_X$	0.81
(EXT)	1	$\wedge_A$	3.0
(FUND)	10	$\wedge_n$	2.35
(INF)	54	$\Rightarrow_X$	0.36
(ND)	4	$\forall_f$	0.16
(PA)	6	$\forall f$	0.34
(POT)	2	$\exists_f$	0.5
(PROD)	7	$\exists f$	0.6
(SEP)	53	$\exists^* f$	0.45
(STE)	43	$\in_X$	0.6
(TOP)	-24	$\in_f$	0.48
(TRH)	9	$\ni_n$	3.9
(UN)	49	$\{\}$	1.11
(VER)	9	$\{\}_A$	0.17
(Z)	52	$\subset_A$	0.35
(Z ₀)	49	$\supset_A$	0.4
(ZF)	49	$\supset_n$	1.7
		$\cap_A$	0.36
		$\cap_A^*$	0.46
$\emptyset$	0.1	U	(VER)
$\emptyset_A$	0.18	U_A	0.39
$\emptyset_n$	1.12	$U_{A,r}$	0.59
$\emptyset_N$	6.2	U_n	1.28
$\emptyset$	0.1	φ_A	0.35
$\emptyset$	0.29		
$\perp_n$	1.13		

c_{ABC}	0.66	f_n	1.23
cod_n	2.4	f^{-1}	0.5
cod'_n	2.18	FU	4.5
comp_{ABC}	0.78	F_1U	4.0
comp_n	2.23	g	4.6
d_A	0.17	g_0	4.5
d_n	2.10	g_1	4.0
dom_n	2.4	g_X	0.49
dom'_n	2.18	h_A	0.37
D	4.27	H_A	0.37
e	1.24	i_0	4.8
e'	4.12	i_1	4.8
$\tilde{e}$	4.21	i_d	4.27
e_0	1.25	id_n	2.15
e_n	1.23	im_a	4.15
$\bar{e}_A$	0.64	I_n	3.30
$\bar{e}_{AB}$	0.31	j_f	4.24
e_n^*	2.2	j_n	1.17
E_n	2.26	k_A	0.26
E'_n	2.4	k_{XY}	0.70
E''_n	2.18	$k_P^{n_U}$	3.21
$E_n^<$	2.30	l_n	1.18
$E_n^=$	2.36	m_a	3.2
$\underline{E}_n$	2.27	m_{ra}	3.2
$\underline{E}_U$	5.16	m_n	1.16
$\underline{E}_{PU}$	5.18	$\underline{M}$	5.0
ev_A	0.1	n_N	6.2
f_A	0.65	N	5.19
f_{AB}	0.33	nb	(ERS)

ρ_1	4.2	$T_{A,r}$	0.52
ρ	(POT)	T_r^A	0.50
ρ_L	0.3	T_n	3.50
ρ_A	0.1	$T_{A,r}^*$	0.56
ρ_A	0.4	u	4.7
ρ_n	1.8	u_1	4.3
ρ^*A	0.44	u_*	4.7
ρ^*	0.5	u_{*1}	4.3
ρ^*U	1.0	U	1.0
ρ_L	0.35	U'	2.9
ρ	(PROD)	U''	2.21
ρ_L	0.23	vb	4.5
ρ_n	1.21	vb_1	4.0
ρ	(EXT)	w_n	3.41
r_A	3.55		
r_A	5.3		
r_n	1.0		
r_n^1	2.8		
r_n^u	2.19		
r^*	4.5	Γ_n	3.21
rel_n	2.4	Π_f	0.16
rel_n^*	2.6	Σ_{1a}	4.23
s	(PA)	Σ_a	4.25
s^1	2.11	Σf	4.24
s_L	1.20	ϕ_n	3.32
s_L^1	2.10	ϕ_n^1	3.32
t	(TRH)	ϕ_n^*	3.0
$t_{A,r}$	0.57	ϕ^*	3.2
v_E	1.26	Ω	0.1

- [1] Artin, M. - Grothendieck, A. - Verdier, J. L.: Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas (SGA 4, 1963/64). Springer Lecture Notes 269, 270 (1972).
- [2] Bénabou, J. - Celeyrette, J.: Généralités sur les Topos de Lawvere et Tierney. Preprint, Séminaire Bénabou (1970).
- [3] Bénabou, J.: Catégories et logiques faibles. Vortrag, Oberwolfach (1973).
- [4] Bunge, M. C.: Boolean topoi and independence of Souslin's hypothesis. Preprint No. 25, Matematisk Institut, Aarhus Universitet (1972/73).
- [5] Cole, J. C.: Categories of sets and models of set theory. Ph.D. thesis, Sussex University (1971); Preprint No. 52, Matematisk Institut, Aarhus Universitet (1970/71).
- [6] Diaconescu, R.: Change of Base for some Toposes. Ph.D. thesis, Dalhousie University (1973).
- [7] Feferman, S.: Set-Theoretical Foundations of Category Theory. Reports of the Midwest Category Seminar III, Springer Lecture Notes 106, 201 - 247 (1969).
- [8] Freyd, P.: Aspects of topoi. Bull. Austral. Math. Soc. 7, 1 - 26 (1973).
- [9] Gray, J.: The Meeting of the Midwest Category Seminar in Zürich, August 24 - 30, 1970. Reports of the Midwest Category Seminar V, Springer Lecture Notes 195, 248 - 255 (1971).
- [10] Herrlich, H. - Strecker, G.: Category Theory. Allyn and Bacon (1973).
- [11] Kock, A.: Applications of Kripke-Joyal semantics. Vortrag, Open House in Category Theory, Aarhus Universitet (1973).
- [12] Kock, A.: Finite objects. Vortrag, Topos-Symposium, Freie Universität Berlin (1973).
- [13] Kock, A. - Mikkelsen, Ch. J.: Non-standard extensions in the theory of toposes. Preprint No. 25, Matematisk Institut, Aarhus Universitet (1971/72).
- [14] Kock, A. - Mikkelsen, Ch. J.: Topos-theoretic Factorization of non-standard Extensions. Preprint, Matematisk Institut, Aarhus Universitet (1972).
- [15] Kock, A. - Wraith, G. C.: Elementary Toposes. Lecture Notes No. 30, Matematisk Institut, Aarhus Universitet (1971).

- [16] Kruse, A. H.: Grothendieck universes and the super-complete models of Shepherdson. *Compositio Math.* 17, 96 - 101 (1965).
- [17] Kühnrich, M.: Über den Begriff des Universums. *Z. math. Logik Grundl. Math.* 12, 37 - 50 (1966).
- [18] Lawvere, F. W.: An Elementary Theory of the Category of Sets. *Proc. Nat. Acad. Sc.* 52, 1506 - 1511 (1964); Preprint, University of Chicago.
- [19] Lawvere, F. W.: The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. *Proc. Conf. Categorical Algebra* (La Jolla 1965) 1 - 20, Springer-Verlag (1966).
- [20] Lawvere, F. W.: Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories. *Category Theory, Homology Theory and their Applications II*, Springer Lecture Notes 92, 134 - 145 (1969).
- [21] Lawvere, F. W.: Quantifiers and Sheaves. *Actes du Congrès international des Mathématiciens* (Nice 1970) 1, 329 - 334 (1971).
- [22] Lawvere, F. W.: Toposes, Algebraic Geometry and Logic. Introduction. *Springer Lecture Notes* 274, 1 - 12 (1972).
- [23] Lawvere, F. W.: Teoria delle categorie sopra un topos di ~~...~~ (1971/72).
- [24] Lawvere, F. W. - Tierney, M.: Elementary Topos. Vorträge, "Midwest" Kategorienseminar ETH Zürich (1970). Bericht darüber in [9].
- [25] Lécourturier, P.: Quantificateurs dans le topos élémentaires. Preprint, Université Nationale du Zaïre, Kinshasa (1971/72).
- [26] MacLane, S.: Foundations for categories and sets. *Category Theory, Homology Theory and their Applications II*, Springer Lecture Notes 92, 146 - 164 (1969).
- [27] MacLane, S.: One Universe as a Foundation for Category Theory. *Reports of the Midwest Category Seminar III*, Springer Lecture Notes 106, 192 - 200 (1969).
- [28] MacLane, S.: Categorical algebra and set-theoretic foundations. *Proc. Sympos. Pure Math.* AMS XIII, Axiomatic set theory, part I, 231 - 240 (1971).
- [29] MacLane, S.: *Kategorien*. Springer-Verlag (1972).
- [30] Maurer, Ch.: Ein rekursiv definiertes geordnetes Paar. In Vorbereitung.
- [31] Mikkelsen, Ch. J.: Characterization of an Elementary Topos. Vortrag, Kategorientagung Oberwolfach (1972).

- [32] Mikkelsen, Ch. J.: Transfinite Induction in Elementary Toposes. Unveröffentlichtes Manuskript, Aarhus (1973).
- [33] Mikkelsen, Ch. J.: On the Internal Completeness of Elementary Topoi. Vortrag, Kategorientagung Oberwolfach (1973).
- [34] Mitchell, W.: Boolean topoi and the theory of sets. J. Pure Appl. Alg. 2, 261 - 274 (1972).
- [35] Osius, G.: Eine Erweiterung der NBG-Mengenlehre als Grundlage der Kategorientheorie. Preprint, Universität Bielefeld (1970).
- [36] Osius, G.: Eine Charakterisierung der Kategorie der Klassen und Abbildungen. Preprint, Universität Bielefeld (1971).
- [37] Osius, G.: A characterization of the category of sets. Preprint, Universität Bremen (1972); erscheint in J. Pure Appl. Alg.
- [38] Osius, G.: Aufzeichnungen über Topoi. Unveröffentlichtes Manuskript, Universität Bremen (1972/73).
- [39] Osius, G.: The internal and external aspect of logic and set theory in elementary topoi. Vorträge auf Tagungen in Aarhus, Oberwolfach und Berlin (1973); erscheint in Cahiers top. géom. diff.
- [40] Paré, R.: Colimits in topoi. Preprint, Dalhousie University (1973).
- [41] Quine, W. V. O.: Mengenlehre und ihre Logik. Vieweg (1973).
- [42] Sonner, J.: On the formal definition of categories. Math. Z. 80, 163 - 176 (1962).
- [43] Tarski, A.: Über unerreichbare Kardinalzahlen. Fund. Math. 30, 68 - 89 (1938).
- [44] Tierney, M.: Sheaf Theory and the Continuum Hypothesis. Toposes, Algebraic Geometry and Logic, Springer Lecture Notes 274, 13 - 42 (1972).
- [45] Tierney, M.: Axiomatic Sheaf Theory. CIME Conference on Categories and Commutative Algebra (Varenna 1971). Edizioni Cremonese (1973).
- [46] Wraith, G. C.: Lectures on Elementary Topoi. Preprint (1973); erscheint in Springer Lecture Notes.
- [47] Zermelo, E.: Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Fund. Math. 16, 29 - 47 (1930).

L e b e n s l a u f

27. 9. 45 als Sohn des Arztes Dr. Günter Maurer und seiner Frau Lieselotte in Mittenwald (Bayern) geboren.
- 1951 - 55 Grundschule in Garmisch-Partenkirchen und in Berlin
- 1955 - 64 Goethe-Gymnasium Berlin-Wilmersdorf (altsprachl.)
17. 2. 64 Abitur
- 1964 - 69 Mathematikstudium (Nebenfach Physik) an der Technischen Universität Berlin (1. Semester) und der Freien Universität Berlin (2. bis 10. Semester)
- 1966 Vordiplom
- 1967 - 71 Mitglied der Studienstiftung des deutschen Volkes
20. 5. 69 Diplom; Titel der Diplomarbeit: Singularitäten differenzierbarer Abbildungen
- 1969 - 70 Aufenthalt an der University of Warwick, England
- seit 1971 Wiss. Assistent am Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin

